知識工学（第 12 回）

二宮 崇（ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp）

確率推論 (14 章)

§14.1 不確実な領域における知識表現

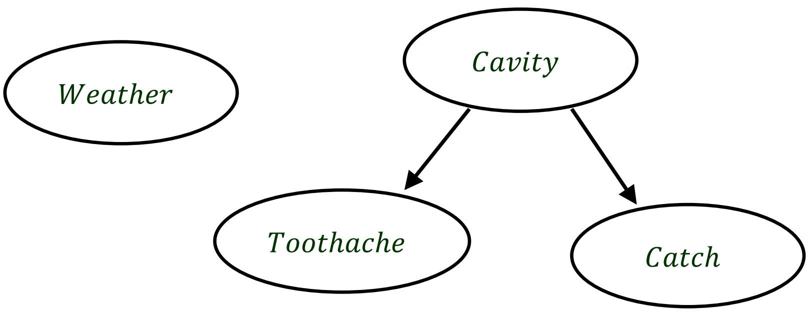
ベイジアンネット: 完全結合確率分布を表現する確率変数間の依存関係を表す非循環有向グラフ(DAG)。有向グラフィカルモデルとも呼ばれる。

・ノードは確率変数に対応

・$X \rightarrow Y$: XはYの親ノード。XはYに直接の影響を持つ。独立や条件付き独立の関係を表す。

・各ノードX_iは$P(X_i|Parents(X_i))$を持つ。

例: 13 章の虫歯の例



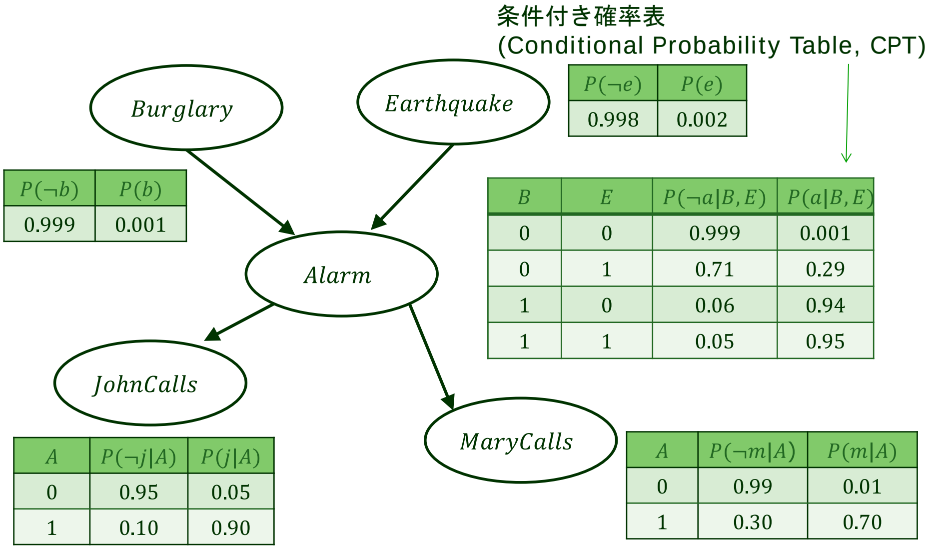
$Weather$は独立。$Toothache$と$Catch$は$Cavity$が与えられた時に条件付き独立。

例: 防犯アラーム

防犯アラーム: 泥棒を検知する。稀に地震にも反応してしまう

ジョン: 隣人でアラームが鳴ったらあなたに電話してもらう。時々電話と混同。

メアリー: 〃。大音量の音楽好きで時々アラームに気づかない。



$P(\neg b)$	$P(b)$
0.999	0.001

$P(\neg e)$	$P(e)$
0.998	0.002

B	E	$P(\neg a \mid B,E)$	$P(a \mid B,E)$
0	0	0.999	0.001
0	1	0.71	0.29
1	0	0.06	0.94
1	1	0.05	0.95

A	$P(\neg j \mid A)$	$P(j \mid A)$
0	0.95	0.05
1	0.10	0.90

A	$P(\neg m \mid A)$	$P(m \mid A)$
0	0.99	0.01
1	0.30	0.70

泥棒と地震はアラームが鳴り出す確率に直接影響を与える。

ジョンとメアリーはアラームに対してのみ直接影響を受ける

条件付き確率表(Conditional Probability Table, CPT): 親ノードの値の組合せに対する条件付き確率。K個の親ノードに対し、2^K個の確率値を持つ。確率変数は省略のため 1 文字で表現している。また、論理確率変数に対しては偽に対する確率値は省略されることが多い。$P(X|Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$に対し、$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$の値の組合せを縦方向に展開し、Xの値を横方向に展開して表を作成することが多い。このように表を作成すると、各行の合計値が 1 になる。

§14.2 ベイジアンネットの意味論

§14.2.1 完全結合分布の表現

$P(X_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge X_n = x_n)$を$P(x_1,\cdots,x_n)$と略記する

$$P(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P\big(x_i \big| parents(x_i)\big)$$

ただし、$parents(x_i)$は$Parents(X_i)$に含まれる変数の具体的な値の組

例: アラームが鳴り(a)、しかし、泥棒(b)も入らず、地震(e)も起きずに、ジョン(j)とメアリー(m)が電話をする確率

$$P(j \land m \land a \land \neg b \land \neg e) = P(j|a)P(m|a)P(a|\neg b \land \neg e)P(\neg b)P(\neg e)$$
$$= 0.90 \times 0.70 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.998 = 0.000628$$

〇ベイジアンネットを構築するための方法

・チェインルール

$P(x_1, \cdots, x_n)$

$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}, \cdots, x_1)$

$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}|x_{n-2}, \cdots, x_1)P(x_{n-2}, \cdots, x_1)$

$\cdots$

$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}|x_{n-2}, \cdots, x_1) \cdots P(x_2|x_1)P(x_1)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1)$

$Parents(X_i) \subseteq \{X_{i-1}, \cdots, X_1\}$が成り立つとき(ノード ID をうまくふれば満たせる)、

$$P(X_i|X_{i-1}, \cdots, X_1) = P(X_i|Parents(X_i))$$

という条件付き独立性を導入したのがベイジアンネット。完全結合確率分布と正しく対応することがわかる。

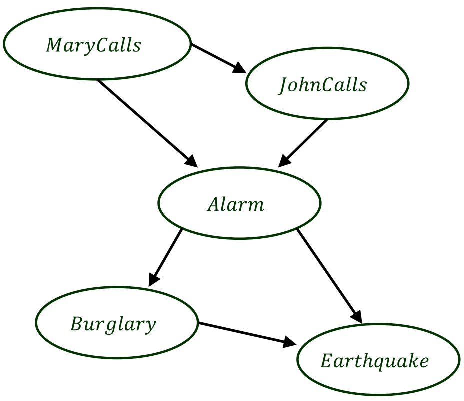
$$P(MaryCalls|JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary) = P(MaryCalls|Alarm)$$

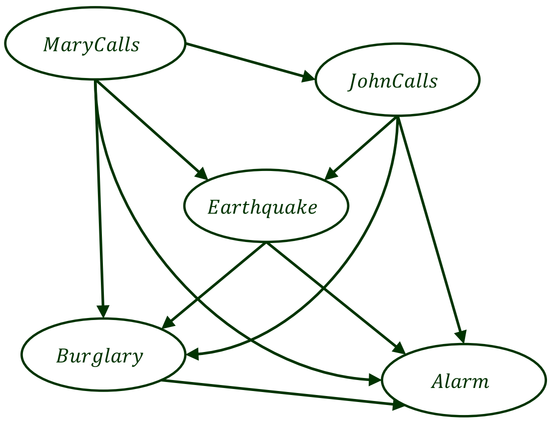
チェインルールによるベイジアンネットの構築例

$$
\begin{aligned}
& P(MaryCalls, JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary) \\
& \quad = P(MaryCalls|JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary) \\
& \quad \times P(JohnCalls|Alarm, Earthquake, Burglary) \\
& \quad \times P(Alarm|Earthquake, Burglary) \times P(Earthquake|Burglary) \\
& \quad \times P(Burglary) \\
& \quad = P(MaryCalls|Alarm) \times P(JohnCalls|Alarm) \\
& \quad \times P(Alarm|Earthquake, Burglary) \times P(Earthquake) \times P(Burglary)
\end{aligned}
$$

〇コンパクト性とノードの順序化

ベイジアンネットの構築の方法は一通りだけではない。任意の順番にノードを追加できる(チェインルール)





最初に作ったベイジアンネットに比べ矢印の数が多い⇒CPT が大きくなる

・ノードを追加する良い手順

因果モデル: $P(effect|cause)$

診断モデル:$P(cause|effect)$

診断モデルよりも因果モデルを優先する方が良いベイジアンネットが得られる。(独立性や条件付き独立性の仮定が得られやすいため)

つまり、根本原因を最初に加え、次にそれらが影響する変数を加える、ということを繰り返す。

§14.2.2 ベイジアンネットにおける条件付き独立性

トポロジカルな意味論その 1

・各ノードは、その親ノードの値が与えられれば、その子孫でないノードと条件付き独立である。

この条件付き独立の命題と CPT から、完全結合分布が再構築できる。(数値的な意味論とトポロジカルな意味論が等価)

トポロジカルな意味論その 2

・各ノードは、マルコフブランケット(その親と子、子の親)の値が与えられれば、ネットワーク内の他の全てのノードと条件付き独立になる。