
知識工学 II(第 8 回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

§ 13 不確実性

§ 13 不確実性(UNCERTAINTY)

§ 13.1 不確実性のもとでの行為

部分的観察、非決定性、組合せから生じる不確実性

制限条件記述問題 (qualification problem): 例外を全て列挙することは難しい

例: 私の車は空港まで 30 分で着く。もし、ガス欠にならなかったら、隕石が落ちてこなかったら、…

どのような結論をだすのが合理的か？

§ 13.1.1 不確実な知識の取り扱い

○医学におけるルール記述の困難

◇条件の完全列挙の困難さ: 全ての完全な条件と結論を記述することが難しい

◇理論上の無知: 医学の領域に関しては完全な理論がない

◇実際上の無知: 原因を調べるための完全なテストを行えているとは限らない

Toothache \Rightarrow *Cavity*

とするのは誤り。歯が痛い時に虫歯(cavity)であるとは限らない。他にも歯茎の病気(gum disease)や、歯膿瘍(abscess)などがあり得る。よって、次のようにしなくてはならない

Toothache \Rightarrow *Cavity* \vee *GumDisease* \vee *Abscess* ...

Cavity \Rightarrow *Toothache*

としても誤りで、全ての虫歯が必ずしも痛みを伴うとも限らない。

○信念の強さ

文自体は実際には真か偽のいずれかであり、それを信じる強さを確率として定義する。

c.f. 真偽の強さに関してはファジィ理論など

論理: 偽、未知、真

信念の強さ: 0(偽) \sim 1(真)

観測(より多くの証拠)によって確率が変化する

例: シャッフルしたトランプのカードをあてる。何も情報がなければそれぞれのカードに 1/52 の確率を与える。カードをみてしまえば、その確率は 0 か 1 になる。

§ 13.1.2 不確実性と合理的意思決定

意思決定理論 (decision theory)

意思決定理論 = 確率論 + 効用理論

飛行機に乗るため空港に到着するためのプランの作成: 可能な限り短い時間で到着するプランが良いか、余裕のあるプランが良いのか?

効用(utility): 待ち時間や間に合わなかったときのペナルティを要素として、プランの良さを数値化したもの。効用関数。

エージェントが合理的 \Leftrightarrow 可能な行為の中から期待効用が最も高い行為を選択

§ 13.2 確率の基本的な記法

§ 13.2.1 確率について

標本空間 Ω : 全ての可能世界 ω の集合。例: サイコロ二つに対して 36 個の可能世界。

可能世界: 世界の完全な記述。互いに排他的かつ網羅的である。

全ての $\omega \in \Omega$ に対し、 $0 \leq P(\omega) \leq 1$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

事象: 命題で記述される可能世界の集合。

命題 ϕ に対する確率

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

例: 二つのサイコロ A, B に対し、 $P(\text{合計が } 11) = P(A\text{が } 5 \text{ かつ } B\text{が } 6) + P(A\text{が } 6 \text{ かつ } B\text{が } 5) = 1/36 + 1/36 = 1/18$

事前確率 (無条件確率) $P(a)$: 何も情報が無い場合の命題 a に対する信念の度合い。

例: 虫歯を持っているという事前確率

$$P(\text{cavity}) = 0.1$$

事後確率(条件付確率) $P(a|b)$: 証拠(evidence) b が与えられた時の a の確率

例: 歯痛があったときの虫歯の確率

$$P(\text{cavity}|\text{toothache}) = 0.6$$

$$P(a|b) = P(a \wedge b)/P(b) \text{ s.t. } P(b) > 0 \Leftrightarrow P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$$

§ 13.2.2 確率つき命題の言語

命題論理と制約充足表現に対する確率モデル

可能世界は、変数と値の対の集合で表現される。

確率変数 (random variable)

定義域 (domain): 確率変数を取り得る値の範囲

- ◇ 論理確率変数 (boolean random variable): $true$ か $false$ の定義域を持つ確率変数。
例: $Cavity$ 。省略表現: $Cavity = true$ を $cavity$ 、 $Cavity = false$ を $\neg cavity$
- ◇ 離散確率変数 (discrete random variable): 離散値を定義域として持つ確率変数。例:
離散確率変数 $Weather$ の定義域 $\{sunny, rainy, cloudy, snow\}$ 。混乱がなければ
 $Weather = snow$ を $snow$ と略す。
- ◇ 連続確率変数 (continuous random variable): 実数値を定義域とする確率変数。

例:

$Cavity$ は論理確率変数

Age の定義域 $\{juvenile, teen, adult\}$

$$P(\text{cavity}|\neg\text{toothache} \wedge \text{teen}) = 0.1$$

確率分布 (probability distribution): 離散確率変数の全ての値の確率をひとまとめにして表現するためにベクトル表記を用いる。

例

$$P(\text{Weather} = \text{sunny}) = 0.7$$

$$P(\text{Weather} = \text{rain}) = 0.2$$

$$P(\text{Weather} = \text{cloudy}) = 0.08$$

$$P(\text{Weather} = \text{snow}) = 0.02$$

と書く代わりに

$$\mathbf{P}(\text{Weather}) = \langle 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 \rangle$$

と書く。

条件付確率のベクトル表記 $\mathbf{P}(X|Y)$: 可能な i, j に対する $P(X = x_i | Y = y_j)$ の値。

$$P(X = x_1 \wedge Y = y_1) = P(X = x_1 | Y = y_1)P(Y = y_1)$$

$$P(X = x_1 \wedge Y = y_2) = P(X = x_1 | Y = y_2)P(Y = y_2)$$

...

をまとめて

$$\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)$$

と表記する。

結合確率分布 (joint probability distribution): $\mathbf{P}(\text{Weather}, \text{Cavity})$ のように、複数の確率変数を並べ全ての組合せの確率を表す。 $\mathbf{P}(\text{Weather}, \text{Cavity})$ は 4×2 の表で表せる。

完全結合確率分布 (full joint probability distribution): 世界を構成する全ての確率変数に対する結合確率分布

連続確率変数を含む場合はベクトル表記は使えない。確率密度関数を用いて表記。

$$P(\text{NoonTemp} = x) = f(x)$$

§ 13.2.3 確率論の公理

公理

1. 全ての ω に対し、 $0 \leq P(\omega) \leq 1$
2. $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
3. 命題 ϕ に対する確率 $P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$

定理

1. $P(\neg a) = 1 - P(a)$
2. $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

コルモゴロフの公理: 公理 1,2 定理 2