知 識 工 学 II (第 3 回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

論理的エージェント(7 章のつづき)

§ 7.5 命題論理における推論

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

・論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \land \alpha$	ベキ等律
α	$\equiv$	$\alpha \lor \alpha$	ベキ等律
$\alpha \land \beta$	$\equiv$	$\beta \land \alpha$	交換律
$\alpha \lor \beta$	$\equiv$	$\beta \lor \alpha$	交換律
$(\alpha \land \beta) \land \gamma$	$\equiv$	$\alpha \land (\beta \land \gamma)$	結合律
$(\alpha \lor \beta) \lor \gamma$	$\equiv$	$\alpha \lor (\beta \lor \gamma)$	結合律
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	復元律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	対偶律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \lor \beta$	含意
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)$	双条件
$\neg(\alpha \land \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \lor \neg\beta$	ド・モルガン
$\neg(\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \land \neg\beta$	ド・モルガン
$\alpha \land (\beta \lor \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$	分配律
$\alpha \lor (\beta \land \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$	分配律
$\alpha \lor (\alpha \land \beta)$	$\equiv$	α	吸収律
$\alpha \land (\alpha \lor \beta)$	$\equiv$	α	吸収律

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \land \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。伴意関係は次の性質を満たす。

1. $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、KBにαを追加してよい。
2. $\alpha \vDash \beta$が成り立つということと$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることは等しい。
3. 論理的同値関係は伴意関係でもある。$\alpha \vDash \beta$ かつ $\beta \vDash \alpha$ であることと$\alpha \equiv \beta$であることは等価。
4. 縮小律 $\alpha_1 \land \alpha_2 \land \alpha_3 \land \cdots \land \alpha_n \vDash \alpha_i$が成り立つ。$KB$の任意の知識$\alpha_i$に対し、$KB \vDash \alpha_i$。

〇伴意関係の性質①「知識ベースの更新」

$\alpha \vDash \beta$が成り立つならば、伴意関係の定義より、$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つ。知識ベースを$KB$に対して、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、$KB \equiv KB \wedge \alpha$となる。つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、知識ベース$KB$に$\alpha$を追加してよい。

〇伴意関係の性質②「$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー」

$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つということと、$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーということは等しい。これは真理値表を書けば確認できる。

〇伴意関係の性質③「論理的同値関係は伴意関係」

(1) $\alpha \equiv \beta$が成り立つとき、$\alpha \vDash \beta$が成り立つ。つまり、論理的同値関係は伴意関係の一種である。

(2) $\alpha \vDash \beta$ と $\beta \vDash \alpha$ が成り立つとき、またそのときにかぎり$\alpha \equiv \beta$が成り立つ。

つまり、吸収律やド・モルガン律など、論理的同値関係を満たす全ての性質(ブール関数の性質など)を伴意関係として推論に使える、ということである。

〇伴意関係の性質④「知識ベースから知識を取り出す」

次の性質は「縮小律(And 除去)」と呼ばれる伴意関係である。

$$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \vDash \beta$$

縮小律はより一般に次の形になる。

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i \ (1 \leq i \leq n)$$

そのため、知識ベースを$KB = R_1 \wedge \cdots \wedge R_n$としたとき、任意の知識$R_i$に対し、$KB \vDash R_i$となる。つまり、知識ベースの中の任意の知識を推論の結果として良い、ということである。また、知識ベースの中のある知識Rが$R = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$という形をしていたときも、$KB \vDash \alpha_i$となる。

・伴意関係の例

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

§7.5 命題論理における推論パターン

推論: $KB \vDash Q$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式Qを導出すること。

我々は多くの場合、知識ベース(KB)が与えられたとき、ある質問(Q)がKBにおいて成り立つかどうか、ということを知りたい。これは、その伴意関係$KB \vDash Q$が成り立つかどうかを判定することによって実現される。$KB \vDash Q$が成り立つかどうか判定することを推論または証明と呼ぶ。推論はなんらかの手続きによって与えられるため、KBからQが導出される推論を$KB \vdash Q$と表現する(関係ではなく手続き)。論理的同値関係や伴意関係により式を展開する方法もあれば、モデル検査のように真理値表で直接確かめる方法もある。

〇問題設定

知識ベースKBと質問Qが与えられ、$KB \vDash Q$が成り立つかどうか知りたい。

〇準備

知識ベースは$KB = R_1 \wedge \cdots \wedge R_n$というふうに論理式の連言の形となっている。それぞれR_iが知識となっているが、推論の基本的な戦略は知識ベースに対する論理的同値関係を保持したまま、新しい知識Rを増やしていくこととなる($KB \equiv KB \wedge R$)。つまり、$KB \vDash R$となるRを導出し、知識ベースに新しい知識Rを追加することを繰り返すことによって、知識ベースの知識をより豊かにしていく。最終的に質問Qが導出されれば$KB \vDash Q$が証明されたことになる。

知識ベースは知識の集合として捉えられるので、$KB = \{R_1, \cdots, R_n\}$とも表現する。

〇証明の戦略その 1 (モデル検査)

$KB \vDash Q$が成り立つかどうか調べるため、KBとQの真理値表をつくって確認する方法。KBが真となるときQも真となっているか確認すれば良い。もしくは$KB \Rightarrow Q$がトートロジーになっているかどうか確認すればよい。

モデル検査の例: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$
$false$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$false$	$true$	$false$	$true$	$false$	$false$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$true$	$false$	$true$	$false$	$true$	$false$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$false$	$false$	$false$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$

〇証明の戦略その 2 (前向き推論)

1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。

2. $KB \vDash Q$となれば、$KB \vDash Q$が証明されたことになる。

3. 1.に戻る。

1.については、伴意関係の性質により知識ベースの真理値を変えないように知識を増やしている(推論している)、といえる。2.については、推論の結果、$KB \equiv KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge Q$となれば、縮小律より$KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge Q \vDash Q$となる。つまり、$KB \vDash Q$となる。

前向き推論は、伴意関係にある$KB \vDash R$をみつけることを繰り返し、最終的にQをみつけることが目標となる。

〇ワンパスワールドの例

証明をする際に論理的同値関係≡で式をつないでいると同じ論理式を何度も書かなければならなくなってしまって煩雑である。そこで、知識ベースの各知識に ID をつけ、新しく追加される知識にも新しい ID をつけて ID を使って推論過程を表現することにする。

知識ベース

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

質問: $\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$

R_6: $\left(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})\right) \land \left((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}\right)$ (R_2に双条件除去)

R_7: $(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$ (R_6に And 除去)

R_8: $\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1})$ (R_7の対偶)

R_9: $\neg(P_{1,2} \lor P_{2,1})$ (R_8とR_4にモーダスポーネンス)

R_{10}: $\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$ (R_9にド・モルガン)

よって$\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$が成り立つ。従って、[1,2]と[2,1]に穴がないことがわかる。

〇証明の戦略その 3 (背理法)

背理法: 論理式$\alpha \land \neg\beta$が常に偽である(充足不能)とき、またそのときに限り$\alpha \vDash \beta$である。反駁による証明、矛盾による証明とも言われる。($\alpha \land \neg\beta$が充足不能であるならば、$\neg(\alpha \land \neg\beta) \equiv \neg\alpha \lor \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなるため、$\alpha \vDash \beta$が成り立つ。)

　背理法を用いるとより簡単に証明できる場合が多い。背理法による証明では、$KB \land \neg Q \equiv KB \land \neg Q \land R$となる$R$を導出していき、$false$が導出されるまでこれを繰り返す。$false$が導出されたならば、$KB \land \neg Q \equiv KB \land \neg Q \land \cdots \land false$となり$KB \land \neg Q$は常に偽となる(充足不能)ことから背理法より$KB \vDash Q$が証明できたことになる。

1. $KB' = KB \land \neg Q$とする。

2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。

3. $KB' \vDash false$となれば、$KB \vDash Q$が証明されたことになる。

4. 2.に戻る。

〇ワンパスワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

ここで、質問を$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$とし、その否定を知識ベースに追加し、矛盾($false$)を導出することを目指す。

R_6:　$\neg(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1})$　(質問$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$の否定)

R_7:　$P_{1,2} \vee P_{2,1}$　(R_6に対しド・モルガン)

R_8:　$(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$　(R_2に双条件除去と And 除去)

R_9:　$B_{1,1}$　(R_7とR_8に対し、モーダスポーネンス)

R_{10}:　$false$　(R_4とR_9より矛盾)

従って、充足不能であることが示せた。よって、$KB \vDash \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$が成り立つ。

問題　質問が$\neg P_{1,2}$だけの場合の証明を与えよ。