知識工学 II(第 11 回)

二宮 崇（ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp）

確率推論 (14 章)

§14.3 条件付き確率分布の効率的な表現

親の数をkとしたとき、CPT のサイズは $O(2^k)$となってしまう

〇基準的な分布(canonical distribution)

分布を決定するパターンといくつかのパラメータを与えることで CPT を再現

決定的なノード: 親の値によって、子の値が不確実性なく論理的に与えられる。

例

親ノード: $Canadian, US, Mexican$

子ノード: $NorthAmerican$

親ノード: 複数の車のディーラーの価格

子ノード: ユーザーの購入価格(最低価格を常に選択)

親ノード: 湖への流入水量，流出量

子ノード: 湖の水位

Noisy-OR モデル: 不確実な論理和のモデル。ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力が独立に与えられる確率モデル。

仮定 1) 原因が親によって全て列挙されている

仮定 2) ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力は他の親ノードに対し独立に与えられる。(各親ノードに対する中間ノードを定義し、中間ノードの論理和により子ノードの真偽を決定的に与えるモデルと等価)

$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \ \cdots \quad X_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$

$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \ \cdots \quad Z_n \ \rightarrow \ Y$ (論理和による決定的ノード)

例　親ノード: $Cold$, Flu, $Malaria$, 子ノード: $Fever$

$$q_{malaria} = P(\neg fever | \neg cold, \neg flu, malaria) = 0.1$$

$$q_{flu} = P(\neg fever | \neg cold, flu, \neg malaria) = 0.2$$

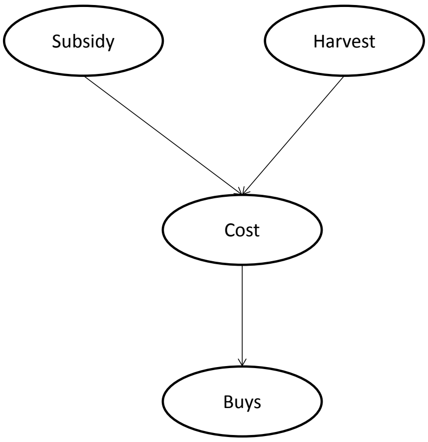
$$q_{cold} = P(\neg fever | cold, \neg flu, \neg malaria) = 0.6$$

$$P\left(x_i \middle| parents(X_i)\right) = 1 - \prod_{\{j:X_j=true\}} q_j$$

CPT

$Cold$	Flu	$Malaria$	$P(fever)$	$P(\neg fever)$
$false$	$false$	$false$	0.0	1.0
$false$	$false$	$true$	0.9	$\mathbf{0.1}$
$false$	$true$	$false$	0.8	$\mathbf{0.2}$
$false$	$true$	$true$	0.98	$0.02 = 0.2 \times 0.1$
$true$	$false$	$false$	0.4	$\mathbf{0.6}$
$true$	$false$	$true$	0.94	$0.06 = 0.6 \times 0.1$
$true$	$true$	$false$	0.88	$0.12 = 0.6 \times 0.2$
$true$	$true$	$true$	0.988	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$

ハイブリッドベイジアンネット: 離散変数と連続変数の両方を持つベイジアンネット



論理確率変数: $Subsidy$(助成金), $Buys$(購入)

連続確率変数: $Harvest$ (収穫量), $Cost$(価格)

◇離散変数と連続変数に対する連続変数の確率分布

線形ガウス分布による収穫量hに対する価格cの確率分布

$$P(c|h, subsidy) = N(a_t h + b_t, \sigma_t^2)(c) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h+b_t)}{\sigma_t}\right)^2}$$

$$P(c|h, \neg subsidy) = N\left(a_f h + b_f, \sigma_f^2\right)(c) = \frac{1}{\sigma_f\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_f h+b_f)}{\sigma_f}\right)^2}$$

◇連続変数に対する離散変数の確率分布

ある一定以上の値なら１に、以下なら０に近い確率分布

正規分布の累積分布関数 (プロビット分布)

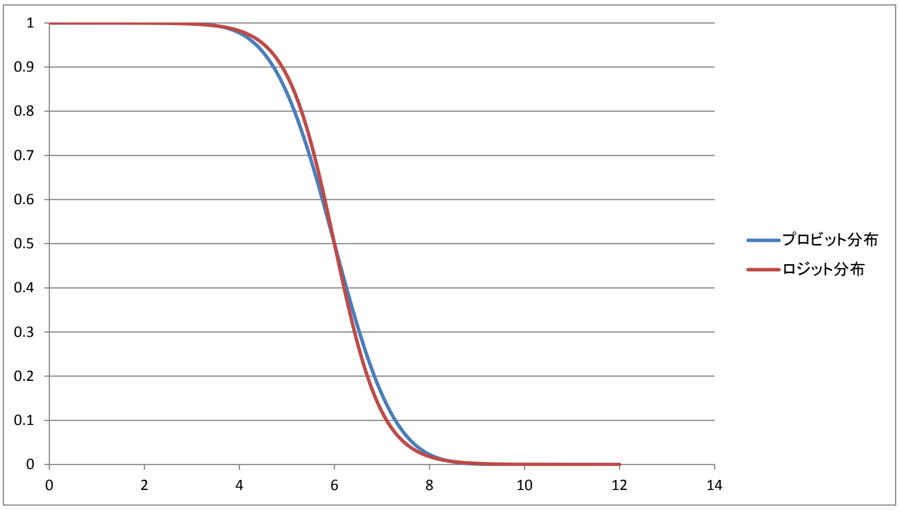
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} N(0,1)(x)dx$$

$$P(buys|Cost=c)=\Phi\left(\frac{-c+\mu}{\sigma}\right)$$

ロジスティック関数(ロジット分布)

$$\Phi(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$P(buys|Cost=c)=\Phi\left(2\frac{-c+\mu}{\sigma}\right)$$



§14.4 ベイジアンネットの厳密推論

推論: 特定の観測事象$\mathbf{e}$が与えられたもとで、質問変数Xの事後確率分布$\mathbf{P}(X|\mathbf{e})$を計算すること。観測事象$\mathbf{e}$は証拠変数の集合$\mathbf{E}$に値を割り当てたもの。

全ての変数集合: $\mathbf{X}=\{X\}\cup\mathbf{E}\cup\mathbf{Y}$

$\mathbf{Y}$: 隠れ変数(非証拠、非質問の変数集合)

例

$$\mathbf{P}(Burglary|JohnCalls=true,MaryCalls=true)=\langle 0.284,0.716\rangle$$

§14.4.1 列挙による推論

$$\mathbf{P}(X|\mathbf{e}) = \alpha\mathbf{P}(X,\mathbf{e}) = \alpha\sum_{\mathbf{y}}\mathbf{P}(X,\mathbf{e},\mathbf{y})$$

ベイジアンネットを使って$\mathbf{P}(X,\mathbf{e},\mathbf{y})$を求めて$\mathbf{P}(X|\boldsymbol{e})$を計算すれば良い。

例

$$\mathbf{P}(Burglary|JohnCalls = true, MaryCalls = true)$$

$$\mathbf{P}(B|j,m) = \alpha\mathbf{P}(B,j,m) = \alpha\sum_{e}\sum_{a}\mathbf{P}(B,j,m,e,a)$$

時間計算量 $O(n2^n)$

$$\begin{aligned}
P(b|j,m) = \alpha\sum_{e}\sum_{a}&P(b)P(e)P(a|b,e)P(j|a)P(m|a)\\
&= \alpha P(b)\sum_{e}P(e)\sum_{a}P(a|b,e)P(j|a)P(m|a)\\
&= \alpha P(b)\{P(e)\big(P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) + P(\neg a|b,e)P(j|\neg a)P(m|\neg a)\big)\\
&+ P(\neg e)(P(a|b,\neg e)P(j|a)P(m|a) + P(\neg a|b,\neg e)P(j|\neg a)P(m|\neg a))\}\\
&= \alpha 0.001 \times (0.002 \times (0.95 \times 0.90 \times 0.70 + 0.05 \times 0.05 \times 0.01) + 0.998\\
&\times (0.94 \times 0.90 \times 0.70 + 0.06 \times 0.05 \times 0.01)) = \alpha 0.00059224
\end{aligned}$$

同様に$P(\neg b|j,m)$を求める

$$P(\neg b|j,m) = \alpha 0.00149191$$

よって、$P(B|j,m) = \alpha\langle 0.00059224, 0.00149191\rangle = \langle 0.284, 0.716\rangle$

時間計算量: $O(2^n)$