知識工学

講義資料

担当教員 二宮 崇
ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp

愛媛大学
工学部情報工学科

知 識 工 学

第 1 回 「 命 題 論 理 」

知識工学

この講義では、人間が持つ知識をどのように表現するのか、人間が行うような推論をどのように実現するのか、その方法について学びます。

講義内容

〇記号に基づく知識表現

・命題論理

・一階述語論理

〇確率に基づく知識表現

・ベイジアンネットワーク(有向グラフィカルモデル)

教科書

・Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

・エージェントアプローチ人工知能 第 2 版: S.J.Russell (著), P.Norvig (著), 古川康一 (翻訳), 共立出版, 2008

知識工学のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

論理的エージェント(7 章)

〇論理による推論

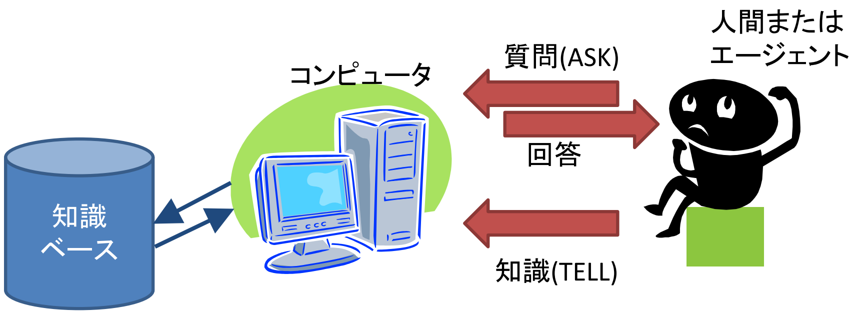
命題論理　　ブール関数(論理回路)＋推論

述語論理　　ブール関数＋(述語、限量子(∀、∃)、変数、関数、定数、等号)＋推論

§7.1 知識に基づくエージェント

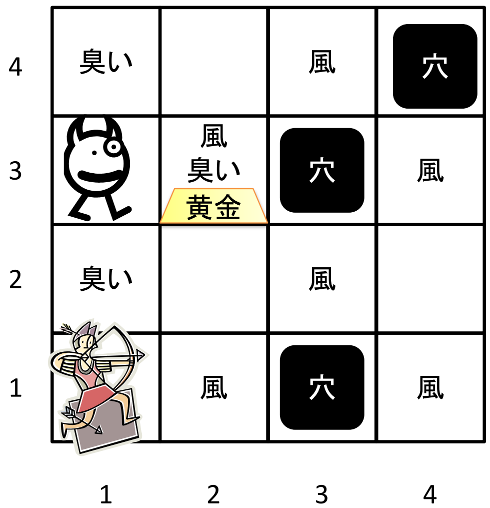
知識ベース(knowledge base, KB)：論理式の集合。他の論理式から導出されない論理式は公理(axiom)と呼ばれる。

TELL と ASK：知識ベースに対する操作。TELL は新しい論理式を知識ベースに加える(知識を増やす)。ASK は知識ベースに質問を投げかける。いずれもその操作に推論 (inference) を伴う。



§7.2 ワンパス・ワールド (Wumpus World)

論理による推論ゲーム



環境：4x4 のマスから成る洞窟。エージェントは[1,1]からスタート。どこかのマスに、ワンパス、黄金がある。いくつかのマスには穴がある。ワンパスがいるマスや穴があるマスにはいるとエージェントは死んでしまう。ワンパスの周囲には「臭い」があって、穴のまわりには「風」が吹いている。

目的：この洞窟のどこかにある黄金をみつけてそれを拾ってこの洞窟から脱出する。

動作：エージェントは、マスを一つずつ動くことができる。一度だけ矢をうつことができる。矢はまっすぐすすんでワンパスにあたればワンパスを倒せる。[1,1]に来ればこの洞窟から脱出できる。黄金のマ

スで黄金をつかむことができる。
センサー: ワンパスの周りでは「臭い」を感じ、穴の周りでは「風」を感じる。壁にぶつかれば「衝撃」を感じる。黄金をみつければ「輝き」を感じる。ワンパスが死ねば「うめき声」が聞こえる。

エージェントは最初は[1,1]の状況しかわからないが、移動することによって、他のマスの状況がわかるようになる。得られた知識から、あるマスに穴があるのかないのか、あるマスにワンパスがいるのかいないのか推論することができる。

例
(1) エージェント A は[1,1]からスタート。風や臭いがないので、[1,2]や[2,1]は安全とわかる(OK)。

4	1,4	2,4	3,4	4,4
3	1,3	2,3	3,3	4,3
2	1,2 OK	2,2	3,2	4,2
1	1,1 A OK	2,1 OK	3,1	4,1
	1	2	3	4

(2) 続いてエージェント A は[2,1]に移動してみる。

4				
3				
2	OK	穴?		
1	OK	A 風 OK	穴?	
	1	2	3	4

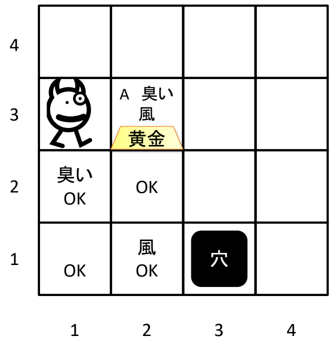
[2,1]では風を感じるので、[2,2]か[3,1]のどちらか、もしくは両方に穴があることがわかる。

(3) 続いて、エージェント A は[1,2]に移動してみる。

4				
3				
2	A 臭い OK	OK		
1	OK	風 OK	穴	
	1	2	3	4

すると、臭いを感じるが、風を感じない。風を感じないので、[2,2]には穴がないことがわかる。よって、[3,1]に穴があることがわかる。[2,1]にいたとき臭いを感じなかったので、[2,2]にワンパスはいないことがわかる。従って、[1,3]にワンパスがいることがわかる。

(4)次にエージェント A は[2,2]に移動して、(その結果[2,3]も OK ということがわかるので)[2,3]に移動する。



ここで、黄金がみつかったので、黄金を拾って[1,1]に帰れば、このミッションは成功ということになる。

§7.4 命題論理

命題論理 ＝ 論理式(ブール関数) ＋ 推論

(つまり、命題論理はブール関数(=論理回路)に推論が加わった体系といえる)

○論理式（ブール関数)

論理式=ブール関数=論理回路

命題記号（proposition symbol)：真($true$)か偽($false$)の値をもつ記号。P, Q, Rなどの大文字を使って表現する。真を表す記号として、$true$ または T または 1 または I が用いられる。偽を表す記号としては、$false$ または F または 0 または O が用いられる。ここでは、真を表す記号として1を用い、偽を表す記号として0を用いることにする。

○論理結合子(logical connective)

¬：NOT，否定，～ではない

∧：AND，連言，かつ

∨：OR，選言，または

⇒：含意，ならば。本によっては、⊃や→が使われることもある。$P \Rightarrow Q$は$\neg P \vee Q$と等しい。

⇔：同値，であるとき、またそのときにかぎり(if and only if)。$P \Leftrightarrow Q$は$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$と等しい。

※含意記号⇒および同値記号⇔は、連言記号∧と同じブール関数の一種であることに注意

論理結合子の優先順序：¬，∧，∨，⇒，⇔

例えば、$\neg P \vee Q \wedge R \Rightarrow S$は$((\neg P) \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow S$と解釈する。

モデル：各命題記号に対する真理値の割り当て。例えば、命題記号P_1, P_2, P_3を含む論理式に対し、モデルの一つは$m_1 = \{P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 1\}$となる。モデルが与えられれば、論理式の真理値が決定される。

真理値表：すべての可能なモデルに対する論理式の真理値を表にして並べたもの。

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

命題論理における推論では論理式の同値関係は非常に重要な概念となる。真理値表の入力(命題記号)と出力(論理式)が等しい論理式は同値関係となる。$P \Rightarrow Q$は$\neg P \vee Q$と等しく、$P \Leftrightarrow Q$は$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$と等しい。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

混乱しやすい論理結合子①：$\vee$とXORの違い。$P \vee Q$はPかQが真$(= 1)$ならば真となるが、P XOR QはPとQのどちらかのみが真のとき真となり、PとQが同時に真のときは偽$(= 0)$となる。直感的には「または」といったとき、両方とも真で良いのか、良くないのか考えないといけない。

混乱しやすい論理結合子②：$P \Rightarrow Q$はPが真$(= 1)$でQが真$(= 1)$ならば全体も真$(= 1)$となる。しかし「5が奇数ならば、東京は日本の首都である」という文は直感的にはおかしいと思うが、論理的には正しい、ということになる。もう一つ、Pが偽$(= 0)$であれば全体が常に真$(= 1)$となる点がややこしい。例えば、「5 が偶数ならば､太郎は賢い」という文は太郎が賢いかどうかにかかわらず真である。これについては、$P \Rightarrow Q$は、「Pが真であるとき、私はQであると主張する。そうでなければ私は何も主張しない」と解釈すればよい。
また、$P \Rightarrow Q$は、$\neg P \vee Q$と等価であるため、選言的論理式と解釈することができ、この解釈も直感的には難しい。例えば、「西の空が明るい、ならば、明日は晴れる」ということと「西の空が明るくない、また

は、明日は晴れる」が等しい命題であることを理解するには時間がかかる。「みかんならば柑橘類である」と「みかんでない、または、柑橘類である」が等しい命題と解釈するにはかなりの論理的な思考作業が必要となる。

混乱しやすい論理結合子③: $P \Rightarrow Q$か$P \Leftrightarrow Q$か。「そのときに限って」と条件がつくときに、$P \Leftrightarrow Q$を使う。ワンパス・ワールドで、風を感じたとき、穴がその周囲にある、という知識は、

$$B_{1,1} \Longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

ただし、$B_{i,j}$は[i,j]において、風を感じる場合に真$(=1)$となり、感じない場合には偽$(=0)$となる命題記号であり、$P_{i,j}$は[i,j]に穴がある場合に真$(=1)$となり、ない場合には偽$(=0)$となる命題記号である。「風を感じる場合には、[1,2]か[2,1]に穴がある」となっており、一見これでよさそうにみえるが、これではうまくいかない。$B_{1,1}$が偽であるとき、$P_{1,2}$が真となるモデルを排除できていない。つまり、「風が吹いていないときは、まわりに穴がない」という知識が表現できていないことになる。従って、

$$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

とするのが良い。

〇命題論理を用いた知識ベース

知識ベースは論理式の連言となる。知識ベースをKBとしたとき、論理式$S_1, \dots, S_n$に対し、$TELL(KB, S_1) \dots TELL(KB, S_n)$を行った場合、$KB = S_1 \wedge \dots \wedge S_n$となる。

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4: $\neg B_{1,1}$

R_5: $B_{2,1}$

$$KB = R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5$$

知識工学

第 2 回「命題論理における推論(1):

論理的同値関係と伴意関係」

論理的エージェント(7 章のつづき)

§7.4 命題論理の続き

〇命題論理の同値関係

論理的同値関係 ($\alpha \equiv \beta$): 真理値表において論理式αと論理式βの真理値がまったく同じとなるとき、αとβは論理的同値関係にある、といい、$\alpha \equiv \beta$と書く。これは$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真($= 1$)となる式)となることに等しい。トートロジーは恒真式とも呼ばれる。

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

・論理的同値関係の例

$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \equiv \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$

α	β	γ	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Rightarrow \gamma$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)$	$\beta \wedge \gamma$	$\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

・重要な論理的同値関係

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

〇命題論理で行いたい推論？
ブール関数の計算をするだけでなく、何か賢い推論を行いたい。

例：ワンパスワールドの知識ベース

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

R_5:　$\neg B_{1,1}$

R_6:　$B_{2,1}$

R_7:　$\neg B_{1,2}$

知識ベース：$KB = R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5 \wedge R_6 \wedge R_7$

この知識ベースが成り立つとき、例えば、次のようなことを知りたい。

$P_{2,2}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{2,2}$が成り立つのかどうか？

$P_{3,1}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{3,1}$が成り立つのかどうか？

ただし、例からもわかるように、知識ベース全体が真$(=1)$となるモデルだけ、つまり、各知識(R_2など)が真となるモデルだけを想定していることに注意しよう。例えば、R_6より$B_{2,1}$は真となるし、R_5より$B_{1,1}$は偽となる。

〇論理的同値関係による推論？

論理的同値関係を使えば、知識ベースの論理式を変換することによって、新しい知識を推論できそうだ。簡単な例として次の推論について考える。

例：

R_1: P

R_2: $P \Rightarrow Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

このとき、Qが成り立つかどうか知りたいとする。つまり、Pと$P \Rightarrow Q$が成り立つとき、Qが成り立つかどうか推論によって示したい。

$KB \equiv P \wedge (\neg P \vee Q) \equiv (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$

となって、$KB \equiv P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$であることがわかる。もともと$R_1$より、$P$が真であることを前提としていて、なおかつ、$KB$も真であることを前提としているから、必然的に$Q$も真でないといけない。従って$Q$が成り立つ。

例：

R_1: $P \Rightarrow Q$

R_2: $\neg Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

このとき、$KB \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$となる。この場合も同様に考えて$\neg P$が成り立つことがわかる。

　最初の例では、Qが推論の結果として得られているような気はするが、しかし、KBと$P \wedge Q$が等価であることがわかっただけで、Qが直接でてくるわけではない。どうやら、論理的同値関係を使って求める推論結果に余分な論理式がついてきてしまうようだ。より形式的に「Qが推論できた」と言えるようにするにはどうすればいいのか。

〇命題論理の推論

ここでは、より形式的な命題論理の推論の定義を与える。論理的同値関係によって導出される結果は、知識ベースの一部＋新しい知識という形をとっているようにみえる。新しい知識だけきれいに導出できる「命題論理の推論」の定義を考えていくことにしよう。命題論理の推論には様々な定義が与えられ得るが、ここではひとまず次のように定義しよう。

　$KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つとき、$KB$から$\alpha$が推論される、ということにしよう。これは、(i) 知識ベースの意味(真理値表)を変えずに、(ii) 知識ベースから知識を減ずることなく、(iii) 新しい論理式αを導出したことになる。命題論理における推論とはこのように論理的同値関係を用いて新しい論理式を導出することに他ならない。

KB
$\equiv KB \wedge \alpha_1$
$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2$
$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$
$\cdots$
$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$

とできたときに、KBから$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$を推論できたということになる。

例:
$R_1: P$
$R_2: P \Rightarrow Q$
$KB = R_1 \wedge R_2$

KB
$\equiv KB \wedge P \wedge (\neg P \vee Q)$ …(ベキ等律)
$\equiv KB \wedge \{(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)\}$ …(分配律)
$\equiv KB \wedge P \wedge Q$
$\equiv KB \wedge Q$ …(ベキ等律)

最初のベキ等律($P \equiv P \wedge P$)は知識ベースをコピーしていることに相当し、最後のベキ等律は余分なPをKBの中のPに吸収させていることになる。よって、$KB \equiv KB \wedge Q$となり、KBからQを推論することができたことになる。

　ここで、$KB \equiv KB \wedge \alpha$と書くかわりに、$KB \vDash \alpha$と書くことにし、この関係を伴意関係(はんいかんけい)と呼ぶことにしよう。上の例では、$KB \vDash Q$と書く。

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): 論理式αに対して、$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つとき、$\alpha$は$\beta$を伴意(はんい、entailment)する関係にある、といい、$\alpha \vDash \beta$と書く。これは、$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー(恒真式)となることに等しい。

伴意関係の概念を用いて、命題論理の推論は次のように定義される。「知識ベースKBがあるとき、何らかの論理式αが成り立つかどうか、つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べることを推論(inference)」と呼ぶことにしよう。
　この伴意関係は論理的同値関係と並んで重要な概念である。まだ、不便そうな伴意関係であるが、伴意関係には様々な良い性質があり、命題論理の推論の基礎となっている。

第 2 回のまとめ

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

重要な論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

推論: $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

知識工学

第3回「命題論理における推論(2):モデル検査と伴意関係の性質」

論理的エージェント(7章のつづき)

〇伴意関係の性質①「$\alpha \vDash \beta$が成り立つことは$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることと等しい」

天下り的に伴意関係$KB \vDash \alpha$は「$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることに等しい」としたが、これはどうして成り立つのだろうか?$KB \vDash \alpha$は$KB \equiv KB \wedge \alpha$のことだから、この論理的同値関係がどういう時に成り立つかどうか真理値表で確かめてみよう。

KB	α	$KB \wedge \alpha$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つのは、$KB = 0, \alpha = 0$のときと、$KB = 0, \alpha = 1$のときと、$KB = 1, \alpha = 1$のときだけである。このとき、いずれの場合も$KB \Rightarrow \alpha$は真となる。従って、$KB \vDash \alpha$が満たされるときは、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなる。逆に、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーであるときは、どのモデルにおいても、$KB = 0, \alpha = 0$となるか、$KB = 0, \alpha = 1$となるか、$KB = 1, \alpha = 1$となるかのいずれかである。このいずれの場合でも、$KB \equiv KB \wedge \alpha$は成り立つ。従って、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなるときは、$KB \vDash \alpha$が成り立つ。よって、$KB \vDash \alpha$が成り立つことと、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることは等しい。

〇モデル検査による推論

伴意関係$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べようと思ったら、KBとαの真理値表を作って、その真理値表において$KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つかどうか調べれば良い。そして、この関係は$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーであれば満たされる、ということであったので、KBが真のとき、αも真になっているかどうか調べればよい、ということになる(KBが偽のときは、常に$KB \Rightarrow \alpha$が真となるので、調べなくても良いということである)。この推論の方法のことは「モデル検査」と呼ばれる。モデル検査は任意のKBとαに対して有限時間でその判定を終了することができるため、非常に優れた推論方法と言える。しかし、モデル検査はモデルの数が少ない場合においては有効であるが、モデルを決定する変数の数に対し指数オーダーでモデルの数が増加してしまう問題がある。そのため、伴意関係が成り立つかどうかを調べるための推論アルゴリズムが多く提案されている。

モデル検査の例：$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

前提部分が真$(= 1)$のところだけみて、結論部分が真$(= 1)$になっているかどうか調べれば良い。これによって$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$が示せたことになる。また、このことは、次の論理的同値関係が示せたということでもある。

$$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \land (P \Rightarrow R)$$

みてわかるように前提から$(P \Rightarrow R)$という知識が新しく得られたことがわかる。

ワンパス・ワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4:　$B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{1,3})$

R_5:　$\neg B_{1,1}$

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	KB
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

$B_{1,1}, B_{2,1}, P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$の 7 つの命題記号だけ考えるとこのような真理値表となり、$2^7 = 128$個の

可能なモデルが存在する。このうち 3 つのモデルについてはKBが真となる。今知りたいことは穴があるかどうか、ということなので、$P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$についてそれぞれ$KB \vDash P_{i,j}$か$KB \vDash \neg P_{i,j}$が成り立つかどうか、判定すればよい。真理値表より$KB \vDash \neg P_{1,1}$と$KB \vDash \neg P_{1,2}$と$KB \vDash \neg P_{1,2}$が成り立つ。

〇伴意関係の性質②「論理的同値関係は伴意関係」

(1) $\alpha \equiv \beta$が成り立つとき、$\alpha \vDash \beta$が成り立つ（$\beta \vDash \alpha$ も成り立つ)。つまり、論理的同値関係は伴意関係の一種である。

(2) $\alpha \vDash \beta$ と $\beta \vDash \alpha$ が成り立つとき、またそのときにかぎり$\alpha \equiv \beta$が成り立つ。

つまり、吸収律やド・モルガン律など、論理的同値関係を満たす全ての性質(ブール関数の性質など)を伴意関係として推論に使える、ということである。

　伴意関係と論理的同値関係の関係については、数式における不等号と等号の関係に似ていると考えるとわかりやすいかもしれない。

$$\alpha \vDash \beta \quad \leftrightarrow \quad x \geq y$$

$$\alpha \equiv \beta \quad \leftrightarrow \quad x = y$$

$$\alpha \vDash \beta \text{かつ} \beta \vDash \alpha \text{ならば} \alpha \equiv \beta \quad \leftrightarrow \quad x \geq y \text{かつ} y \geq x \text{ならば} x = y$$

※伴意関係$\alpha \vDash \beta$においてαとβのどちらが大きいと考えればいいのか、ということについては、一概には言えず、難しい。情報量という観点からいうと$\alpha \geq \beta$となるし、モデルの包含関係からいうと、$\beta \geq \alpha$となる。情報量という観点から$\alpha \vDash \beta$は$\alpha \geq \beta$に対応すると考えるのがわかりやすいと思われる。

〇伴意関係の性質③「知識ベースの更新」

$\alpha \vDash \beta$が成り立つならば、伴意関係の定義より、$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つ。知識ベースを$KB$に対して、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、$KB \equiv KB \wedge \alpha$となる。つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、知識ベース$KB$に$\alpha$を追加してよい。

〇伴意関係の性質④「知識ベースから知識を取り出す」

次の性質は「縮小律(And 除去)」と呼ばれる伴意関係である。

$$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \vDash \beta$$

縮小律を用いると知識ベースの中の任意の知識を推論結果として取り出すことができる。縮小律については、次の真理値表よりその関係が成り立つことがわかる。

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

　縮小律はより一般に次の形になる。

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i \ (1 \leq i \leq n)$$

そのため、知識ベースを$KB = R_1 \wedge \cdots \wedge R_n$としたとき、任意の知識$R_i$に対し、$KB \vDash R_i$となる。つまり、知識ベースの中の任意の知識を推論の結果として良い、ということである。また、知識ベースの中のある知識Rが$R = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$という形をしていたとき、$KB \vDash \alpha_i$となる。

知識ベースの更新と知識ベースからの知識の抽出をうまく組み合わせればモデル検査とは異なる推論ができそうである。$KB = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$であるとき、伴意関係より、$KB \equiv \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m$ということが示せたのなら、任意の$\beta_i$に対し$KB \vDash \beta_i$となる。

〇伴意関係の例

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And 除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And 除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

これらが成り立つことは真理値を調べることによって成り立つことがわかる。ただし、伴意関係は論理的同値関係とは異なり逆方向に成り立つとは限らないことに注意。この中で特に縮小律、モーダスポーネンス、融合規則は重要である。

〇妥当性、充足可能性、背理法

妥当性 (validity): ある論理式がすべてのモデルにおいて真であるとき、その論理式は妥当である、という。妥当な論理式はトートロジー(恒真式)と呼ばれる。

充足可能性 (satisfiability): ある論理式が何らかのモデルで真となるとき、その論理式は充足可能である、という。$KB = R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5$の例では 3 つのモデルで真となるため充足可能である。論理式αがmで真である場合、mはαを充足する(satisfy)、もしくは、mはαのモデルである、という。

背理法: 論理式$\alpha \wedge \neg\beta$が充足不能であるとき、またそのときに限り$\alpha \vDash \beta$である。反駁による証明、矛盾による証明とも言われる。

充足不能とは、どのモデルにおいても偽となることである。すなわち、αが妥当(トートロジー)であることと、$\neg\alpha$が充足不能であることは等しい。従って、$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$であるから、背理法はまさに$\alpha \Rightarrow \beta$が妥当であることを調べていることになっている。

背理法によるメリットは二つある。一つは、αとβにわかれていた二つの論理式が一つの論理式になることである。αの中の部分論理式とβの中の部分論理式を組み合わせて推論できるようになる。もう一つは、論理式が妥当であることを示すのではなく、論理式が充足不能であることを示せばよい点である。

論理式が妥当であることを直接示すには論理式全体が恒真であることを示さねばならず、式の置き換えで論理式全体が恒真となるように導くのは容易ではない。一方、充足不能であることを示すためには、追加される知識のうちのただ一つが偽になることを示せば良いだけである。

第3回までのまとめ

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

重要な論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

伴意関係($\alpha \vDash \beta$)：$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。

1. $\alpha \vDash \beta$が成り立つということと$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることは等しい。
2. 論理的同値関係は伴意関係でもある。$\alpha \vDash \beta$ かつ $\beta \vDash \alpha$ であることと$\alpha \equiv \beta$であることは等価。
3. $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、KBにαを追加してよい
4. 縮小律 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i$が成り立つ。$KB$の任意の知識$\alpha_i$に対し、$KB \vDash \alpha_i$。

重要な伴意関係の例

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And 除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And 除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

推論：$KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

モデル検査：$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べるため、KBとαの真理値表をつくって確認する方法。$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーになっているかどうか確認すればよい。推論の一種。

背理法：論理式$\alpha \wedge \neg\beta$が充足不能であることと$\alpha \vDash \beta$であることは等価。

知識工学

第４回「命題論理における推論(3):推論」

論理的エージェント(7 章のつづき)

§7.5 命題論理における推論パターン

我々は多くの場合、知識ベース(KB)が与えられたとき、ある質問(Q)がKBにおいて成り立つかどうか、ということを知りたい。これは、その伴意関係$KB \vDash Q$が成り立つかどうかを判定することによって実現される。$KB \vDash Q$が成り立つかどうか判定することを推論または証明と呼ぶ。推論はなんらかの手続きによって与えられるため、KBからαが導出される推論を$KB \vdash \alpha$と表現する(関係ではなく手続き)。論理的同値関係や伴意関係により式を展開する方法もあれば、モデル検査のように真理値表で直接確かめる方法もある。

モデル検査においてモデルを全列挙すればその伴意関係を判断できるが、この方法は必ず指数オーダーの計算ステップを要する。命題論理における推論は NP 完全であることがわかっているため、最悪計算量はやはり指数オーダーとなるものの、現実的にはより効率的に行える場合が多く存在することがわかっている。そのため、伴意関係が成り立つかどうかを調べるための推論アルゴリズムが多く提案されている。

推論できた場合には必ず伴意関係にあることが保証されている推論アルゴリズムは「健全(sound)である」と言われる($KB \vdash \alpha$なら$KB \vDash \alpha$であるとき健全)。逆に伴意関係にある論理式を必ず推論できる推論アルゴリズムは「完全(complete)である」と言われる($KB \vDash \alpha$なら$KB \vdash \alpha$であるとき完全)。完全性を満たすのは難しいが、幸いなことに論理における完全な推論手続きが存在する。また、モデル検査は任意のKBとαに対して有限時間で終了するため、健全かつ完全な推論方法である。

〇問題設定

知識ベースKBと質問αが与えられ、$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか知りたい。

〇準備

知識ベースは$KB = R_1 \wedge \cdots \wedge R_n$というふうに論理式の連言の形となっている。それぞれR_iが知識となっているが、推論の基本的な戦略は知識ベースに対する論理的同値関係を保持したまま、新しい知識Rを増やしていくこととなる($KB \equiv KB \wedge R$)。つまり、$KB \vDash R$となるRを導出し、知識ベースに新しい知識Rを追加することを繰り返すことによって、知識ベースの知識をより豊かにしていく。最終的に質問αが導出されれば$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

知識ベースはこのように知識の集合として捉えられるので、$KB = \{R_1, \cdots, R_n\}$とも表現する。また、推論は各知識に対し行うため、ある知識PとQから新しい知識Rが得られる(推論される)とき、次のように表記する。

$$P, Q \vdash R \qquad \text{もしくは} \qquad \frac{P \quad\quad Q}{R}$$

〇証明の戦略その１ (普通の証明)

1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。この操作(推論)を$KB \vdash R$と書くことにする。

2. $KB \vdash \alpha$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

3. 1.に戻る。

1.については、伴意関係の性質により知識ベースの真理値を変えないように知識を増やしている(推論している)、といえる。2.については、推論の結果、$KB \equiv KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge \alpha$となれば、縮小律より$KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge \alpha \vDash \alpha$となる。つまり、$KB \vDash \alpha$となる。

推論($\vdash$)は、伴意関係にある$KB \vDash R$をみつけることを繰り返し、最終的にαをみつけることが目標となる。

・伴意関係による推論規則（$KB \vdash R$)

$KB \vDash R$ について、その定義より、$KB \equiv KB \wedge R$ が成り立つ。このことから、知識ベースから伴意関係にある論理式を求め、その論理式を新しい知識として知識ベースに追加することができる。

例

モーダスポーネンス（Modus Ponens，三段論法)

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

縮小律（And 消去, And-Elimination)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

・論理的同値関係による推論規則（$KB \vdash R$)

論理的同値関係は双方向に成り立つ伴意関係であったため、論理的同値関係を用いて推論をすすめることもできる。

双条件除去（biconditional elimination)の例

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)} \qquad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

〇ワンパスワールドの例

証明をする際に論理的同値関係≡で式をつないでいると同じ論理式を何度も書かなければならなくなってしまって煩雑である。そこで、知識ベースの各知識に ID をつけ、新しく追加される知識にも新しい ID をつけて ID を使って推論過程を表現することにする。

知識ベース

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

質問：$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

R_2に双条件除去を適用し、

R_6:　$\left(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})\right) \wedge \left((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}\right)$

続いて、And 除去を行い、

R_7:　$(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$

次に対偶をとり、

R_8:　$\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

ここで、R_8とR_4に対し、モーダスポーネンスを適用し、

R_9:　$\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

を得る。ド・モルガンの法則より、

R_{10}:　$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

を得る。従って、[1,2]と[2,1]に穴がないことがわかる。

〇証明の戦略その 2 (背理法による証明)

背理法を用いるとより簡単に証明できる場合が多い。背理法による証明では、$KB \wedge \neg\alpha \equiv KB \wedge \neg\alpha \wedge R$となる$R$を導出していき、偽$(=0)$が導出されるまでこれを繰り返す。偽が導出されたならば、$KB \wedge \neg\alpha \equiv KB \wedge \neg\alpha \wedge \cdots \wedge 0$となり$KB \wedge \neg\alpha$は常に偽となる(充足不能)ことから背理法より$KB \vDash \alpha$が証明できたことになる。

1. $KB' = KB \wedge \neg\alpha$とする。
2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。
3. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。
4. 2.に戻る。

〇ワンパスワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

ここで、質問を $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$とし、その否定を知識ベースに追加し、矛盾($= 0$)を導出することを目指す。

R_6:　$\neg(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1})$

R_6に対しド・モルガンと復元律により、

R_7:　$P_{1,2} \vee P_{2,1}$

を得る。R_2に双条件除去と And 除去を適用し、

R_8:　$(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$

を得る。ここで、R_7とR_8に対し、モーダスポーネンスを適用し、

R_9:　$B_{1,1}$

を得る。R_4とR_9より、

R_{10}:　0

となる。従って、充足不能であることが示せた。よって、$KB \vDash \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$が成り立つ。

問題　質問が$\neg P_{1,2}$だけの場合の証明を与えよ。

第 4 回のまとめ

〇証明の戦略その 1 (普通の証明)

1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。この操作(推論)を$KB \vdash R$と書くことにする。

2. $KB \vdash \alpha$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

3. 1.に戻る。

〇証明の戦略その 2 (背理法による証明)

1. $KB' = KB \wedge \neg\alpha$とする。

2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

4. 2.に戻る。

〇推論規則 ($KB \vdash R$)

推論規則$KB \vdash R$には、伴意関係$KB \vDash R$や論理的同値関係$KB \equiv R$を用いることができる。

知識工学

第 5 回「命題論理における推論(4):融合法」

論理的エージェント(7 章のつづき)

〇証明の戦略その 3 (融合法)

証明の戦略その 1 やその 2 で証明できたときは、たしかに$KB \vDash \alpha$となることがわかるが、なかなか証明できないときや、証明が本当にできないときには、$KB \vDash \alpha$が成り立つのか成り立たないのかわからない。また、どのような証明手続きを踏めば証明できるのか定かではない。そこで、必ず有限時間で終了する完全な推論の方法である融合法を紹介する。

融合法はその基本戦略として背理法を用いる。つまり、$KB \wedge \neg\alpha$が充足不能であることを示すことで、$KB \vDash \alpha$を示す。

1. $KB \wedge \neg\alpha$を連言標準形(conjunctive normal form: CNF)に変換する。連言標準形は次の形をした文である。

$$(l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \cdots) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee \cdots) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee l_{n,2} \vee \cdots)$$

ただし、$l_{i,j}$はリテラルと呼ばれ、リテラルは命題記号または命題記号の否定のいずれかである。命題記号は正リテラル、命題記号の否定は負リテラルとも呼ばれる。$(l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \cdots)$は節と呼ばれる。$KB \wedge \neg\alpha$をCNF に変換した結果の節集合を$KB'$とする。

2. 節集合KB' (知識ベース+$\neg\alpha$) に対し融合規則を適用し、$KB' \vDash R$となるRをみつけRを節集合KB'に追加する(KB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3. 追加できる新しい節がない場合、$KB \nvDash \alpha$が証明されたことになる。

4. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

5. 2.に戻る

・融合規則 (もっとも簡単な形, 選言的三段論法)

$$\frac{l \vee m \qquad \neg m}{l}$$

これについては、$(l \vee m) \wedge \neg m$が推論の前提部になり、$\neg m$であるから、mは常に偽となることがわかり、$l \vee m$はlと等しくなることがわかる。機械的には、分配則より、$(l \vee m) \wedge \neg m \equiv (l \wedge \neg m) \vee 0 \equiv l \wedge \neg m$であり、縮小律(And 除去)により、$l \wedge \neg m \vDash l$が成り立つ。従って、$(l \vee m) \wedge \neg m \vDash l$となる。または真理値表で確認しても成り立つことがわかる。

・融合規則(長さ 2 の節の場合)

$$\frac{l \vee m \qquad \neg m \vee n}{l \vee n}$$

これについては分配則を 2 回適用し、縮小律(And 除去)を適用すれば、結論部が得られる。もしくは、真理値表を書けばこの推論が成り立つことがわかる。

・融合規則(一般)

$$\frac{l_1 \vee \cdots \vee l_i \vee m \qquad \neg m \vee n_1 \vee \cdots \vee n_j}{l_1 \vee \cdots \vee l_i \vee n_1 \vee \cdots \vee n_j}$$

これについては長さ 2 の場合の融合規則におけるlやnに$l_1 \vee \cdots \vee l_i$や$n_1 \vee \cdots \vee n_j$を代入すれば成り立つことがわかる。

融合規則においては、二つの節が選言で融合することになるがその場合に同じリテラルが複数個出現した場合それらを一つに簡単化できる(簡単化しなければいけない)。例えば、$(A \vee B)$と$(A \vee \neg B)$を融合すれば、$A \vee A$となるが、これはAに簡単化される。この操作をファクタリング(factoring)という。

融合規則をKB'に対し適用し、偽$(= 0)$が出現すれば、全体$(KB \wedge \neg\alpha)$が充足不能である、ということが証明できたことになり、背理法により$KB \vDash \alpha$となることがわかる。偽が出現せず、融合規則をもう適用できなくなれば、全体$(KB \wedge \neg\alpha)$を真とする何らかのモデルを割り当てることができ、その場合は$KB \vDash \alpha$が成り立たないことがわかる。

偽の出現については、例えば、

$$\frac{m \qquad \neg m}{0}$$

となる場合であり、これは$KB \wedge \neg\alpha \equiv R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge m \wedge \neg m \equiv 0$となることを意味しており、全体が充足不能となる。

・連言標準形(CNF)への変換

次に、最初のステップである CNF への変換について説明する。任意の論理式は CNF に変換可能である。次の CNF への変換手続きは次のようになる。

1. $\alpha \Leftrightarrow \beta$を$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$に置き換えることで、$\Leftrightarrow$を除去する
2. $\alpha \Rightarrow \beta$を$\neg\alpha \vee \beta$に置き換えることで$\Rightarrow$を除去する
3. 次の論理的同値関係を使うことで否定$(\neg)$を内側へいれていく

   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (二重否定除去)

   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ (ド・モルガンの法則)

   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (ド・モルガンの法則)
4. 次の論理的同値関係を使うことで、$\vee$を$\wedge$に対して可能な限り分配する

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

この手続きによって CNF となる。

例

$$B_{1,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$$

1．⇔の除去

$$\left(B_{1,1} \Rightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)\right) \wedge \left(\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}\right)$$

2．⇒の除去

$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\neg\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \vee B_{1,1}\right)$$

3．¬を内側にいれる

$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\left(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}\right) \vee B_{1,1}\right)$$

4．∨を∧に対して分配

$$\left(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \wedge \left(\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}\right) \wedge \left(\neg P_{2,1} \vee B_{1,1}\right)$$

・融合法の完全性

節集合Sに対し、融合規則を可能な限り適用した結果の節の集合を$RC(S)$とする。命題記号は有限であり、ファクタリングにより一つの節の中に同じリテラルは二度出現しないため、$RC(S)$は有限のサイズとなる。従って、融合規則の適用は必ず終了する。

基礎融合定理 (ground resolution theorem)

節集合Sが充足不能 $\Leftrightarrow$ $RC(S)$が偽を含む

右から左は明らかに成り立つので、

節集合Sが充足不能 $\Rightarrow$ $RC(S)$が偽を含む

を証明すれば良い。これは、この対偶を証明すれば良い。

$RC(S)$が偽を含まない $\Rightarrow$ 節集合Sは充足可能

$RC(S)$が求まり、偽が含まれなければ、全体を真とするモデル(各命題記号に対する真理値の割り当て)を必ず与える手続きが存在し、そのため、上の基礎融合定理が成り立つ。

実際にワンパスワールドの例を融合法で解いてみる。

〇ワンパスワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}\right)$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

$KB = \{\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \mathrm{R}_4, \mathrm{R}_5\}$, $Q: \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$としたとき、$KB \vDash Q$が成り立つか否か？

$$KB \land \neg Q \equiv \neg P_{1,1} \land [B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})] \land [B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})] \land \neg B_{1,1} \land B_{2,1} \land \neg(\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1})$$

$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$に対し、$\Leftrightarrow$ の除去を適用し、

$$[B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})] \land [(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}]$$

続いて⇒を除去し、否定を内側に入れ、分配則を適用する。

$$[\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}] \land [\neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \lor B_{1,1}] \equiv [\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}] \land [(\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}) \lor B_{1,1}]$$

$$\equiv (\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}) \land (\neg P_{1,2} \lor B_{1,1}) \land (\neg P_{2,1} \lor B_{1,1}) \quad \cdots \quad ①$$

同様に$[B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})]$に対し、$\Leftrightarrow$ の除去を適用し、

$$[B_{2,1} \Rightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})] \land [(P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}) \Rightarrow B_{2,1}]$$

続いて⇒を除去し、否定を内側に入れ、分配則を適用する。

$$[\neg B_{2,1} \lor P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}] \land [\neg(P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}) \lor B_{2,1}]$$

$$\equiv [\neg B_{2,1} \lor P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}] \land [(\neg P_{1,1} \land \neg P_{2,2} \land \neg P_{3,1}) \lor B_{2,1}]$$

$$\equiv (\neg B_{2,1} \lor P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1}) \land (\neg P_{1,1} \lor B_{2,1}) \land (\neg P_{2,2} \lor B_{2,1}) \land (\neg P_{3,1} \lor B_{2,1}) \quad \cdots \quad ②$$

クエリーの否定を中にいれ、

$$\neg(\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}) = P_{1,2} \lor P_{2,1} \quad \cdots \quad ③$$

①②③より、

$$KB \land \neg Q \equiv \neg P_{1,1} \land (\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}) \land (\neg P_{1,2} \lor B_{1,1}) \land (\neg P_{2,1} \lor B_{1,1}) \land (\neg B_{2,1} \lor P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$$

$$\land (\neg P_{1,1} \lor B_{2,1}) \land (\neg P_{2,2} \lor B_{2,1}) \land (\neg P_{3,1} \lor B_{2,1}) \land \neg B_{1,1} \land B_{2,1} \land (P_{1,2} \lor P_{2,1})$$

ここで、$KB \land \neg Q$が矛盾することを証明する。

$$\neg P_{1,2} \lor B_{1,1}, \neg B_{1,1} \vdash \neg P_{1,2}$$

$$\neg P_{2,1} \lor B_{1,1}, \neg B_{1,1} \vdash \neg P_{2,1}$$

$$P_{1,2} \lor P_{2,1}, \neg P_{1,2} \vdash P_{2,1}$$

$$P_{2,1}, \neg P_{2,1} \vdash 0$$

よって矛盾することが証明された。従って背理法より、$KB \vDash Q$が成り立つ。

付録：融合法の完全性の証明の詳細

$RC(S)$が偽を含まない ⇒ 節集合Sは充足可能

このことを証明する。$RC(S)$が求まり、偽が含まれなければ、全体を真とするモデル(各命題記号に対する真理値の割り当て)を必ず与える手続きが存在する。その手続きは次のようになる。

Sに出現する命題記号を$P_1, \cdots, P_k$とする。1からkまでiを動かしながら、

- $\neg P_i$を含み、かつそれまでに選ばれた$P_1, \cdots, P_{i-1}$への真理値割り当てのもとで他のリテラルがすべて偽となるような節が$RC(S)$に存在する場合、偽をP_iに割り当てる。
- そのような節が存在しなければ、P_iに真を割り当てる。

この手続きにより、全体を真とするモデルが与えられるため、基礎融合定理が成り立つ。

　最後に、この手続きで与えられる真理値割り当てがSのモデルとなることを数学的帰納法で証明する。$P_1, \cdots, P_{i-1}$まで真理値割り当てが終わっていて、その割り当てにより真偽が決定される節には偽となる節は存在しないと仮定する。今、P_iの真理値を決めようとしているとする。このとき、ある節Cが偽になる場合は、Cが$(0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 \vee P_i)$となるか、$(0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 \vee \neg P_i)$となるかのどちらかであるが、$RC(S)$にこの一方しか含まれない場合は、$C$が真になるよう$P_i$の値を決めれば良い。問題は$RC(S)$にこの両方が含まれる場合であるが、融合法により融合規則を可能な限り適用した後であるため、これらの二つを融合した$(0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0) = 0$となる節が存在していることになる。しかし、これは仮定に反する。よって、$RC(S)$に上記の二つの節が同時に含まれることはない。従って、数学的帰納法により、この真理値割り当ての手順でS全体を真とするモデルを作ることができる。 (証明終)

第 4 回と第 5 回のまとめ

○証明の戦略その 1 (普通の証明)

1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。この操作(推論)を$KB \vdash R$と書くことにする。

2. $KB \vdash \alpha$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

3. 1.に戻る。

○証明の戦略その 2 (背理法による証明)

1. $KB' = KB \wedge \neg\alpha$とする。

2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

4. 2.に戻る。

○推論規則 ($KB \vdash R$)

推論規則$KB \vdash R$には、伴意関係$KB \vDash R$や論理的同値関係$KB \equiv R$を用いることができる。

〇証明の戦略その 3 (融合法)

1. $KB \land \neg\alpha$を連言標準形(CNF)に変換し、その節集合をKB'とする。連言標準形は次の形をした論理式である。

$$(l_{1,1} \lor l_{1,2} \lor \cdots) \land (l_{2,1} \lor l_{2,2} \lor \cdots) \land \cdots \land (l_{n,1} \lor l_{n,2} \lor \cdots)$$

ただし、$l_{i,j}$は正リテラル(命題記号)か負リテラル(否定のついた命題記号)である。$(l_{i,1} \lor l_{i,2} \lor \cdots)$は節と呼ばれる。

2. 節集合KB'に対し融合規則を適用し、$KB' \vDash R$となるRをみつけRを節集合KB'に追加する(KB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。
3. 追加できる新しい節がない場合、$KB \nvDash \alpha$が証明されたことになる。
4. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。
5. 2.に戻る

〇融合法での推論規則 ($KB \vdash R$)

融合法で用いる推論規則は融合規則ただ一つのみ

$$\frac{l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor m \qquad \neg m \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j}{l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j} \quad \text{(融合規則)}$$

〇連言標準形(CNF)への変換

1. $\alpha \Leftrightarrow \beta$を$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)$に置き換えることで、$\Leftrightarrow$を除去する
2. $\alpha \Rightarrow \beta$を$\neg\alpha \lor \beta$に置き換えることで$\Rightarrow$を除去する
3. 次の論理的同値関係を使うことで否定($\neg$)を内側へいれていく

   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (二重否定除去)

   $\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$ (ド・モルガンの法則)

   $\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$ (ド・モルガンの法則)

4. 次の論理的同値関係を使うことで、$\lor$を$\land$に対して可能な限り分配する

$$\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$$

知 識 工 学

第 6 回「一 階 述 語 論 理」

一階述語論理 (8)

§8.2　一階述語論理の統語論と意味論

命題論理を用いることで様々な知識を表現し、その知識に対し推論することを学んできた。しかし、命題論理の論理式はブール関数であり、その表現力にはおのずと限界がある。例えば、次のような命題を表現したいとしよう。

> 例 1
> すべての人間は死ぬ。
> ソクラテスは人間である。
> ∴ソクラテスは死ぬ

これは三段論法(syllogism)といわれる推論であるが、命題論理ではこれを取り扱うことができない。次の例も考えてみよう

> 例 2
> モーツァルトは天才である。
> ベートーベンは天才である。

これら二つの命題を単に命題記号PやQとするだけでは、「～は天才である」といった共通の関係を見いだすことができない。また次の例もみてみよう。

> 例 3
> ジョンはヨーコを愛している。

この文を命題記号Pとすると、「～が～を愛している」という世の中にある多数の関係を記述するのにおよそ十分な一般性を有しているとは言いがたい。

　これらの関係をみていると、なんらかの変数、定数、述語等を用いて表現する必要があるように考えられる。命題論理でとらえることができない関係を記述するために用いられているより強力な論理が一階述語論理である。最初の例は「$\forall x(Human(x) \Rightarrow Motal(x)) \land Human(Socrates)$」であるとき、「$Motal(Socrates)$」と結論づけることができる。次の例でも「$Genius(Mozart) \land Genius(Beethoven)$」

と表現でき、さらに次の例も、「$Love(John, Yoko)$」と表現できる。ここで用いられた$Human$、$Motal$、$Genius$、$Love$など記号は述語と呼ばれる。述語には引数を記述することができ、引数の関係を表現することができる。また、さらに引数の一般的な性質を表したいとき、∀や∃といった限量記号を使って表現することができる。

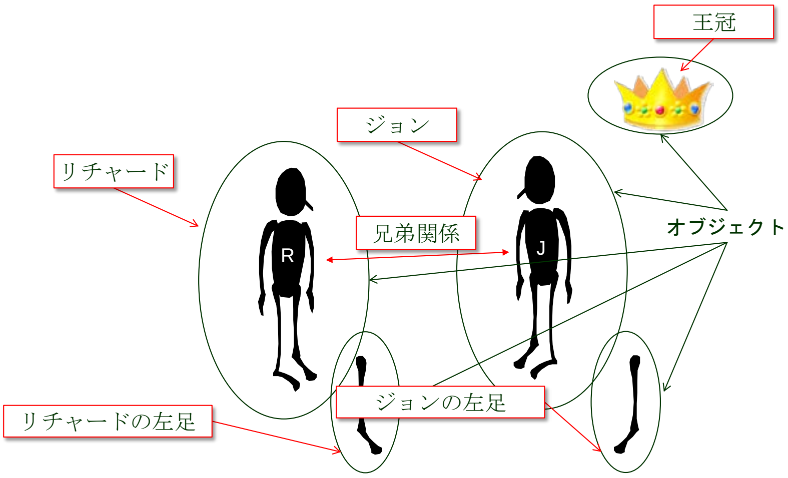
§8.2.1 一階述語論理におけるモデル(一階述語論理の意味論)

命題論理においては、命題記号に対する真理値表がその命題論理の意味を表しており、命題記号に対する真理値の割り当てがモデルと呼ばれていた。一階述語論理のモデルは次のように与えられる。

・オブジェクトの集合から成る。このオブジェクトの集合は領域(domain)と呼ばれる。

・オブジェクトおよびオブジェクト間には関係が定義されている。関係はn項組で定義される。

例えば、次のようなオブジェクトの集合を考えてみよう。



「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」は全てオブジェクトである。「ジョン」と「リチャード」は兄弟なので、(ジョン，リチャード)および(リチャード，ジョン)という「兄弟関係」が定義される。ジョンがこの王冠をかぶっていれば(ジョン，王冠)という「頭上関係」が定義される。「ジョンの左足」は(ジョン，ジョンの左足)という「左足関係」で定義される。ただし、「ジョン」に対する「ジョンの左足」はただ一つのオブジェクトしかないため、この関係は関数となっている。

§8.2.2 記号と解釈

次に、一階述語論理の統語論について説明する。まず、一階述語論理の基本的な記号には次の 3 種類がある。

定数記号：オブジェクトを表現する。$Richard$や$John$や$Crown$など。

述語記号：関係を表現する。$Brother$や$OnHead$など。

関数記号：関数を表現する。$LeftLeg$など。

　論理式の真理値を決定するために、論理式とモデルとを関連づける必要がある。そのために、定数記号、述語記号、関数記号が参照するオブジェクト、関係、関数を規定する解釈が必要である。例えば、先ほどの例で可能な解釈としては、「$Richard$」という定数は「リチャード」というオブジェクトを参照

し、「$John$」という定数は「ジョン」というオブジェクトを参照し、「$Crown$」という定数は「王冠」というオブジェクトを参照する。「$Brother$」という述語は、兄弟関係を参照し、「$LeftLeg$」という関数は、左足関係という関数を参照する。このようなモデルと解釈が与えられると、論理式の真偽を決定することができる。これは命題論理において、命題記号に真理値が割り当てられると、論理式の真偽を決定できることに対応する。つまり、一階述語論理においては、モデルと解釈が与えられると論理式の真偽を決定することができる、ということである。全ての可能なモデルおよび全ての可能な解釈という観点から、伴意関係や妥当性を定義することができ、これが推論の基礎となる。また、モデルの中には自然数などのように無限のオブジェクトが存在しうるため、可能なモデルを列挙するモデル検査は一般に一階述語論理では適用できない、ということに注意しよう。

§8.2.3 項

関数と定数と変数の組合せを項(term)と呼ぶ。定数も項である。項も定数同様何らかのオブジェクトを指す。例えば、関数と定数を組み合わせた$LeftLeg(John)$は項である。

§8.2.4 原子文

述語記号に括弧をつけて、項をその中に並べた論理式を原子文(atomic sentence)と呼ぶ。

原子文の例

$Brother(Richard, John)$

$Married\left(Father(Richard), Mother(John)\right)$

ただし、$Married$は述語記号、$Father, Mother$は関数記号であり、$Father(Richard)$や$Mother(John)$は項であることに注意しよう。

§8.2.5 複合文

命題論理の場合と同様、論理結合子($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)を用いて原子文をつないだ論理式を複合文(complex sentence)と呼ぶ。

複合文の例

$\neg Brother(LeftLeg(Richard), John)$

$Brother(Richard, John) \wedge Brother(John, Richard)$

$King(Richard) \vee King(John)$

$\neg King(Richard) \Rightarrow King(John)$

§8.2.6 限量子

オブジェクトの集合に対する性質や関係をまとめて定義するための記号を限量子(quantifier)と呼ぶ。定数記号や関数記号を用いて列挙するのではなく、限量子と変数でまとめて関係や性質を定義することができる。

全称限量子($\forall$, universal quantifier)：「全ての...」と読む。$\forall x\, P$というふうに用いて、全てのオブジェクトxに対し、Pの論理式が真であるとき、$\forall x\, P$は真となる。

全称限量子の例

$\forall x\, \left(King(x) \Rightarrow Person(x)\right)$

例えば、xが参照しうる領域を規定した拡張解釈が与えられたとき、xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうる。この各オブジェクトxに対し、$King(x) \Rightarrow Person(x)$が真となるならば、$\forall x\, \left(King(x) \Rightarrow Person(x)\right)$は真となる。

存在限量子($\exists$, existential quantifier)：「ある...」と読む。$\exists x\, P$というふうに用いて、少なくともある一つ以上のオブジェクトxに対し、Pの論理式が真となるとき、$\exists x\, P$は真となる。

存在限量子の例

$\exists x\, \left(Crown(x) \land OnHead(x, John)\right)$

xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうるが、xが「王冠」を参照したとき、$Crown(x) \land OnHead(x, John)$は真となるため、$\exists x\, \left(Crown(x) \land OnHead(x, John)\right)$は真となる。

[問題] 次の論理式はどちらも使い方として誤っている。何故か？

$$\forall x\, \left(King(x) \land Person(x)\right)$$

$$\exists x\, \left(Crown(x) \Rightarrow OnHead(x, John)\right)$$

○入れ子の限量子

限量子を並べて用いることで複雑な論理式を表現できる。

「兄弟は兄弟姉妹である」$\forall x \forall y\, \left(Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)\right)$

「兄弟姉妹関係は対称である」$\forall x \forall y\, \left(Sibling(x, y) \Leftrightarrow Sibling(y, x)\right)$

同じ種類の限量子が続く場合は次のように省略して記述することもできる。

「兄弟は兄弟姉妹である」の例 $\forall x, y\, \left(Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)\right)$

また、同じ種類の限量子はその順番を入れ替えても意味は変わらない。

$$\forall x \forall y\, P(x, y) \equiv \forall y \forall x\, P(x, y)$$

$$\exists x \exists y\, P(x, y) \equiv \exists y \exists x\, P(x, y)$$

異なる種類の限量子はその順番を変えると意味が異なるので注意が必要である。例えば、次の二つの論理式は意味が異なる。

$$\forall x \exists y\, Loves(x, y)$$

$$\exists y \forall x\, Loves(x, y)$$

○$\forall$と$\exists$の関係

否定を通して$\forall$と$\exists$には密接な関連がある。

$$\neg \exists x\, P \ \equiv\ \forall x \neg\, P$$

$$\neg \forall x\, P \ \equiv\ \exists x \neg\, P$$

つまり、否定(¬)を限量子の内側に入れることができ(出すことができ)、そのときに全称限量子は存在限量子に、存在限量子は全称限量子に入れ替わる。例えば、「誰もがパースニップを嫌う」は「パースニップを好きな人がいない」と等価である。

$$\forall x \neg\, Like(x, Parsnips) \equiv \neg \exists x\, Like(x, Parsnips)$$

さらに、「誰もがアイスクリームを好む」は「アイスクリームが嫌いな人はいない」と等価である。

$$\forall x\ \ Like(x, IceCream) \equiv \neg \exists x \neg\, Like(x, IceCream)$$

つまり、一般に次のことが成り立つ。

$$\forall x\, P \ \equiv\ \neg \exists x \neg\, P$$

$$\exists x\, P \ \equiv\ \neg \forall x \neg\, P$$

〇限量子の範囲の拡大と縮小

全称限量子と存在限量子について次の性質が成り立つ。

$$R \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$

$$R \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$

$$R \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$

$$R \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$

ただし、Rは変数xを含まない論理式とする。それぞれの等式を左から右にみると、AND と OR に関して、限量子の範囲を自由に広げることができる (限量子を外側に追いやることができる)、ということになる。論理式を CNF に変形するときには、この操作(上の式の左から右方向への置き換え)によって、全称限量子を外側に追いやることを行う。右から左にみると、AND と OR に関して、限量子の変数が含まれない述語は無視して、その限量子の範囲を縮小して良い、ということがわかる。

〇限量子の統合と分解

全称限量子と存在限量子についてはさらに次の性質が成り立つ。

$$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

$$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

最初の式については、$\forall x\, P(x)$と$\forall x\, Q(x)$がそれぞれ成り立っていれば、$\forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$として、一つの全称限量子にまとめることができる、ということである。全称限量子を外側に追いやりたいとき、本来なら、$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$に対し、まず、$x$から$y$への変数の置き換えを行い、$\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y)$とし、それから、$\forall x \forall y\, \big(P(x) \wedge Q(y)\big)$としなければいけないが、そのようなことをせずとも、$\forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$としてまとめてよい、ということである。また、逆方向(右辺から左辺)からみると、$\forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$という形の式であっても、$P(x)$と$Q(x)$をそれぞればらばらに$\forall x\, P(x)$と$\forall x\, Q(x)$として用いてかまわない、ということである。

存在限量子に関する次の式についても、同様に、$\exists x\, P(x)$または$\exists x\, Q(x)$が成り立つならば、$\exists x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$として、一つにまとめても良いということであるし、$\exists x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$が与えられたのならば、$\exists x\, P(x)$または$\exists x\, Q(x)$が成り立つことにしてよい、ということである。

§8.2.7 等号関係

一階述語論理では等号(equality symbol)を用いることができる。これによって二つの項が同じオブジェクトを参照する、という意味の記述を行うことができる。

等号の例

$$Father(John) = Henry$$

これは、$Father(John)$が参照するオブジェクトと$Henry$が参照するオブジェクトが同じものであるということである。つまり、この原子文はある解釈が与えられたとき、その解釈において$Father(John)$と$Henry$が同じオブジェクトを参照しているときに真となる。また、等号と否定を組み合わせて、二つの項が同一のオブジェクトではないことを記述することもできる。

例：「リチャードには少なくとも二人の兄弟がいる」

$$\exists x, y \left(Brother(x, Richard) \land Brother(y, Richard) \land \neg(x = y)\right)$$

$\neg(x = y)$は$x \neq y$と省略表記されることが多い。

[問題] $\exists x, y\ Brother(x, Richard) \land Brother(y, Richard)$だけだと「少なくとも二人の兄弟がいる」ことにはならない。何故か？

○バッカス・ナウア記法による一階述語論理の統語論

文→原子文 | (文　結合子　文) | 限量子 変数, … 文 | ¬文

原子文→述語(項, …) | 項 = 項

項→関数(項, …) | 定数 | 変数

結合子→⇒ | ∧ | ∨ | ⇔

限量子→∀ | ∃

定数→A | X_1 | $John$ | …

変数→a | x | s | …

述語→$Before$ | $HasColor$ | $Raining$ | …

関数→$Mother$ | $LeftLeg$ | …

第 6 回のまとめ

〇一階述語論理

定数：オブジェクトを表現する。$Richard$や$John$や$Crown$など。

関数：関数を表現する。$LeftLeg$など。

項：関数と定数と変数の組合せ。定数も項である。項も定数同様何らかのオブジェクトを表現する。$LeftLeg(John)$など。

述語：関係を表現する。$Brother$や$OnHead$など。

原子文：述語に括弧をつけ、項をその中に並べた式。原子文には真か偽が割り当てられる。$Brother(Richard, John)$など。

複合文：論理結合子($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)を用いて原子文をつないだ式。 $Brother(Richard, John) \wedge Brother(John, Richard)$など。

全称限量子($\forall$)：「全ての…」と読む。$\forall x\ P$というふうに用いて、全てのオブジェクトxに対し、Pの論理式が真であるとき、$\forall x\ P$は真となる。$\forall x\ \left(King(x) \Rightarrow Person(x)\right)$など。

存在限量子($\exists$)：「ある…」と読む。$\exists x\ P$というふうに用いて、少なくともある一つ以上のオブジェクトxに対し、Pの論理式が真となるとき、$\exists x\ P$は真となる。$\exists x\ \left(Crown(x) \wedge OnHead(x, John)\right)$など。

等号：二つの項が同じオブジェクトを参照することを表す。$Father(John) = Henry$など。等号付きの一階述語論理と等号を扱わない一階述語論理がある。

〇限量子に関する性質

入れ子 (同じ限量子が並んでいれば入れ替えても良い)

$$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$$

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$$

限量子と否定の関係

$$\neg \exists x\, P \ \equiv\ \forall x \neg P$$

$$\neg \forall x\, P \ \equiv\ \exists x \neg P$$

限量子の範囲の拡大と縮小 (ただし、Rは変数xを含まない)

$$R \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$

$$R \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$

$$R \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$

$$R \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$

限量子の統合と分解

$$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

$$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

知 識 工 学

第 7 回「一 階 述 語 論 理 に お け る 推 論 (1) :

限 量 子 の 推 論 規 則 と 単 一 化」

一階述語論理（9）

§9　一階述語論理による推論

§9.1 命題論理 対 一階述語論理

一階述語論理においてはモデルが無数に存在するためモデル検査による論理的同値関係の判定を行うことはできない。モデルを有限に限ったとしても、その解釈は爆発的数の解釈が存在することになる。

命題論理と一階述語論理における論理的同値関係と伴意関係をまとめると次のようになる。

	命題論理	一階述語論理
論理的同値関係$\alpha \equiv \beta$	真理値表が同一になる	
	$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー	$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー
	$\alpha \vDash \beta$かつ$\beta \vDash \alpha$	$\alpha \vDash \beta$かつ$\beta \vDash \alpha$
伴意関係$\alpha \vDash \beta$	$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$	$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$
	$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー	$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー

モデル検査を用いることができなくても、その伴意関係の公理を与えることは出来そうである。特に、αが真であるとき、βも常に真であるとき、伴意関係が成り立つといえることに注意しよう。命題論理において真理値表を用いずとも推論ができたように、一階述語論理においても論理的同値関係、伴意関係の公理を定義すればそれらを用いることにより推論が可能となる。

§9.1.1 限量子に対する推論規則

基礎項（ground term）: 変数を含まない項。

代入 $SUBST(\theta, \alpha)$: 文αに代入θを適用する。θは$\{v_1/g_1, \cdots, v_n/g_n\}$という形をしており、変数$v_i$に基礎項$g_i$を代入することを意味する。

全称具体化（universal instantiation, UI）: $\forall v\ \alpha$のvを任意の基礎項で置き換えた文αを推論する($\forall v\ \alpha$とvを任意の基礎項で置き換えた文αは伴意関係にある)。

$$\frac{\forall v\ \alpha}{SUBST(\{v/g\}, \alpha)}$$

例:

$$\forall x\ \big(King(x) \wedge Greedy(x) \Rightarrow Evil(x)\big)$$

に対し、次の各式を伴意できる。(それぞれ、$\{x/John\}$、$\{x/Richard\}$、$\{x/Father(John)\}$による代入)

$$King(John) \land Greedy(John) \Rightarrow Evil(John)$$
$$King(Richard) \land Greedy(Richard) \Rightarrow Evil(Richard)$$
$$King(Father(john)) \land Greedy(Father(John)) \Rightarrow Evil(Father(John))$$
$$\dots$$

これは要するに、任意のvに対して文αが成り立つわけだから、vに任意の項を代入しても良い、というわけである。

存在具体化（existential instantiation，EI）：$\exists v\ \alpha$のvを新しい定数kで置き換えた文αを推論する($\exists v\ \alpha$とvを新しい定数kで置き換えた文αは伴意関係にある)。

$$\frac{\exists v\ \alpha}{SUBST(\{v/k\}, \alpha)}$$

例：

$$\exists x\ \left(Crown(x) \land OnHead(x, John)\right)$$

に対し、次の文を伴意できる。

$$Crown(C) \land OnHead(C, John)$$

ただし、Cは知識ベースのどこにも現れていない新しい定数でなければならない。

これは要するに、あるvに対して、文αが成り立つわけだから、そのあるvに定数Cという名前をつけてやった、ということである。この新しい定数はスコーレム定数（Skolem constant）と呼ばれる。

§9.1.2 命題論理への帰着

全称具体化と存在具体化を用いると、限量子のついた文から限量子のついていない文を推論することができる。伴意関係の性質から、推論によって得られた、限量子のついていない新しい文を知識ベースに加えることができる。限量子のついていない文だけを用いて推論することにより、一階述語論理を命題論理に帰着することができ、命題論理の推論問題として一階述語論理の問題を解くことができる。

限量子のつかない原子文は変数を持たない原子基礎文（ground atomic sentence)となる。異なる原子基礎文（ground atomic sentence）には異なる真偽値を自由に割り当てられる、と考えるならば、原子基礎文は命題論理と等価である。従って、一階述語論理の知識ベースに対し、全称具体化と存在具体化を適用することで、限量子のついていない知識ベースを推論することができ、限量子のついていない知識ベースに対し命題論理の推論を適用することで、一階述語論理の推論を行うことができる、ということである。

例：次の知識ベースが成り立つとき、$\mathrm{Evil}(John)$が成り立つかどうか？

R_1:　$\forall x\ \left(King(x) \land Greedy(x) \Rightarrow Evil(x)\right)$

R_2:　$King(John)$

R_3:　$Greedy(John)$

R_4:　$Brother(Richard, John)$

このとき、UI より、

R_5:　$King(John) \land Greedy(John) \Rightarrow Evil(John)$
が得られ、R_2とR_3とR_5に対し、モーダスポーネンスを適用し、
R_6:　$Evil(John)$
が得られる。

この手法は命題論理化（propositionalization）と呼ばれる。いかなる一階述語論理の知識ベースおよび質問は命題論理に置き換えることができるような気がするかもしれないが、実はそれは難しい。問題は、関数を含む項は無限に入れ子になった項(例えば、$Father(Father(\ldots(Father(John))\ldots)))$を作ることができてしまう、ということだ。つまり、UI によって、無限に新しい知識を生成することができてしまう。しかし、エルブランの定理という有名な定理のおかげで、伴意関係にある知識ベースと質問に対しては有限の大きさの命題論理に必ず置き換えることができることがわかっている。つまり、伴意関係にある知識ベースと質問に対しては、有限時間でその関係が成り立つかどうか判定できる、ということである。しかし、逆に言えば、伴意関係にあるかどうかを有限時間で判定するアルゴリズムは存在しない、ということでもある。これはチューリング機械の停止問題と同じであり、一階述語論理に対する伴意関係の問題は、半決定的（semidecidable）である。すなわち、伴意関係にある文に対しては yes と答えるアルゴリズムが存在するが、伴意関係にない文に対して no と答えるアルゴリズムは存在しない。

§9.2 単一化と持ち上げ

命題論理化による推論では、全称具体化と存在具体化をどのように用いれば命題化できるのか、命題化するところまでが難しい。§9.1.2 で示した例は答えまですぐにたどり着く推論を行ったが、例えば、次のような推論をしたとしたらどうだろう？

$$King(Richard) \land Greedy(Richard) \Rightarrow Evil(Richard)$$

この知識が何か害をなすわけではないが、無駄な推論といえよう。そこで、一階述語論理の形のままで推論する規則をいくつか用意することで無駄な推論をしなくてすむように工夫しよう。命題論理の推論規則を一階述語論理の推論規則にすることを「持ち上げ」といい、持ち上げにより得られる推論規則を用いて、直接、一階述語論理の推論をすることを考える。

§9.2.1 一階推論規則

一般化モーダスポーネンス：ある原子文p_i, p'_iとqに対して、全てのiに対して$SUBST(\theta, p'_i) = SUBST(\theta, p_i)$となる代入が存在するとき、次の推論が成り立つ。

$$\frac{p'_1, p'_2, \cdots, p'_n, (p_1 \land p_2 \land \cdots \land p_n \Rightarrow q)}{SUBST(\theta, q)}$$

例
R_1:　$\forall x\ (King(x) \land Greedy(x) \Rightarrow Evil(x))$
R_2:　$King(John)$
R_3:　$\forall y\ Greedy(y)$

この知識ベースに対し、

$$\frac{King(John), Greedy(y), King(x) \wedge Greedy(x) \Rightarrow Evil(x)}{SUBST(\{x/John, y/John\}, Evil(x)) = Evil(John)}$$

となり、$Evil(John)$を直接推論することができる。命題論理化に代わるこの推論規則はモーダスポーネンスの持ち上げ（lifting）版と呼ばれる。代入θは「単一化」により自動的に得られる。

§9.2.2 単一化

一般化モーダスポーネンスなどの持ち上げ推論規則を適用するには異なる論理表現を同一にする代入を見つけないといけない。この処理は単一化（unification）と呼ばれる。つまり、持ち上げ推論規則における代入θを自動的に計算することが単一化である。単一化のアルゴリズムには様々な手法があるが、グラフ単一化の手法が一般的である。いずれにせよ、単一化のアルゴリズム$UNIFY$は二つの原子文p, qを受け取り$SUBST(\theta, p) = SUBST(\theta, q)$となる代入$\theta$を返す(または$SUBST(\theta, p)$を返す)。つまり、

$$UNIFY(p, q) = \theta \ where \ SUBST(\theta, p) = SUBST(\theta, q)$$

である。

例

R_1:　$Knows(John, Jane)$

R_2:　$\forall y \ Knows(y, Bill)$

R_3:　$\forall y \ Knows(y, Mother(y))$

R_4:　$\forall x \ Knows(x, Elizabeth)$

このとき、質問$\exists x \ Knows(John, x)$に対し、次の単一化が実行される。

$UNIFY\big(Knows(John, x), Knows(John, Jane)\big) = \{x/Jane\}$

$UNIFY\big(Knows(John, x), Knows(y, Bill)\big) = \{x/Bill, y/John\}$

$UNIFY\Big(Knows(John, x), Knows\big(y, Mother(y)\big)\Big) = \{y/John, x/Mother(John)\}$

$UNIFY\big(Knows(John, x), Knows(x, Elizabeth)\big) = fail$　(本当は fail しない)

最後の単一化が失敗しているのは変数xに$John$と$Elizabeth$の両方を代入しないといけないためである。これは、変数xの処理をきちんと行っていないためであって、本当に単一化に失敗するわけではない。元の$\forall x \ Knows(x, Elizabeth)$の式をみてみると、これは$\forall z \ Knows(z, Elizabeth)$としても等価であり、このように同じ変数名を使わないようにしないといけない。

$UNIFY\big(Knows(John, x), Knows(z, Elizabeth)\big) = \{x/Elizabeth, z/John\}$

このように変数名を書き換えておくことで、変数名の衝突問題を避けることができる。

　しかし、まだもう一つ単一化に関して問題が残っている。例えば、

$$UNIFY\big(Knows(John, x), Knows(y, z)\big)$$

に対する答えはどうなるであろう？実に様々な可能な代入がありえるのだ。例えば、次の二つがあり得る。

$\{y/John, x/z\}$　(つまり、$Knows(John, x)$という代入結果になる)

$\{y/John, x/John, z/John\}$ (つまり、$Knows(John, John)$という代入結果になる)
この場合どちらの代入が好ましいのだろうか？前者のほうがより一般的でこの結果をまた別の推論に使える、という意味でも好ましい。後者には余計な推論(xとzを$John$としてしまうこと)が入っており、この代入が目的の推論に使えない場合はまったく役に立たない。そこで前者のようにより一般的な単一化結果を返す代入の方がより望ましいと考える。

最汎単一化子（most general unifier, MGU）: 項に対して代入を行うことで、項はより特殊な項となる。逆に特殊になる前の項は一般な項であったといえる。二つの項に対する可能な代入のうち最も一般な項を返す代入のことを最汎単一化子（MGU）と呼ぶ。項の特殊-一般の関係は半順序関係となっており、単一化は上限(least upper bound)を求めていることになる。単一化において上限は唯一に定まる。

※上限は上界(upper bound)のうち最も下側の要素。情報数学 I の半順序関係を参照せよ。

参考: 単一化アルゴリズム

```
function UNIFY(x, y, θ):
    if θ = failure then return failure
    else if x = y then return θ
    else if VARIABLE?(x) then return UNIFY-VAR(x, y, θ)
    else if VARIABLE?(y) then return UNIFY-VAR(y, x, θ)
    else if COMPOUND?(x) and COMPOUND?(y) then
        return UNIFY(x.ARGS, y.ARGS, UNIFY(x.OP, y.OP, θ))
    else if LIST?(x) and LIST?(y) then
        return UNIFY(x.REST, y.REST, UNIFY(x.FIRST, y.FIRST, θ))
    else return failure

function UNIFY-VAR(var, x, θ):
    if {var/val}∈θ then return UNIFY(val, x, θ)
    else if {x/val}∈θ then return UNIFY(var, val, θ)
    else if OCCUR-CHECK?(var, x) then return failure
    else return add {var/x} to θ
```

※OCCUR-CHECK?(var,x)は変数 var が項 x の中に存在するかどうかチェックする述語である。これは単一化後、項の中にループ構造ができるどうかチェックしていることに相当する。ループができる場合は単一化に失敗する。多くの単一化アルゴリズムでは occur check は省略されている。

第 7 回のまとめ

○命題論理と一階述語論理の推論の関係

	命題論理	一階述語論理
論理的同値関係$\alpha \equiv \beta$	真理値表が同一になる	
	$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー	$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー
	$\alpha \vDash \beta$かつ$\beta \vDash \alpha$	$\alpha \vDash \beta$かつ$\beta \vDash \alpha$
伴意関係$\alpha \vDash \beta$	$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$	$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$
	$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー	$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー

○命題論理化による推論

基礎項（ground term）: 変数を含まない項。

代入 $SUBST(\theta,\alpha)$: 文αに代入θを適用する。θは$\{v_1/g_1,\cdots,v_n/g_n\}$という形をしており、変数$v_i$に基礎項$g_i$を代入することを意味する。

全称具体化（universal instantiation, UI）: $\forall v\ \alpha$のvを任意の基礎項で置き換えた文αを推論する($\forall v\ \alpha$とvを任意の基礎項で置き換えた文αは伴意関係にある)。

$$\frac{\forall v\ \alpha}{SUBST(\{v/g\},\alpha)}$$

存在具体化（existential instantiation, EI）: $\exists v\ \alpha$のvを新しい定数kで置き換えた文αを推論する($\exists v\ \alpha$とvを新しい定数kで置き換えた文αは伴意関係にある)。

$$\frac{\exists v\ \alpha}{SUBST(\{v/k\},\alpha)}$$

命題論理化による推論: UI と EI を用いて、限量子を全て除去し、基礎項のみからなる論理式を導出する。異なる原子基礎文を異なる命題記号と考えて、命題論理の推論を適用することで一階述語論理の推論を行う。

○持ち上げによる推論

命題論理化による推論では、全称具体化と存在具体化をどのように用いれば命題化できるのか、命題化するところまでが難しい。命題論理の推論規則を一階述語論理の推論規則にすることを「持ち上げ」といい、持ち上げにより得られる推論規則を用いて、直接、一階述語論理の推論をすることを考える。

一般化モーダスポーネンス：ある原子文p_i, p'_iとqに対して、全てのiに対して$SUBST(\theta, p'_i) = SUBST(\theta, p_i)$となる代入が存在するとき、次の推論が成り立つ。

$$\frac{p'_1, p'_2, \cdots, p'_n, (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q)}{SUBST(\theta, q)}$$

代入θは単一化により自動的に得られる。

○単一化

単一化（unification)：異なる論理表現を同一にする代入を見つけるための処理。一般化モーダスポーネンスなどの推論規則における代入θを自動的に計算すること。単一化のアルゴリズムには様々な手法があるが、グラフ単一化の手法が一般的。単一化のアルゴリズム$UNIFY$は二つの原子文p, qを受け取り$SUBST(\theta, p) = SUBST(\theta, q)$となる代入$\theta$のうち最も一般な代入(最汎単一化子)を返す。

$$UNIFY(p, q) = \theta \ where \ SUBST(\theta, p) = SUBST(\theta, q)$$

最汎単一化子（most general unifier, MGU)：二つの項に対する可能な代入のうち最も一般な項を返す代入のことを最汎単一化子（MGU）と呼ぶ。項の特殊-一般の関係は半順序関係となっており、単一化は上限(least upper bound)を求めていることになる。単一化において上限は唯一に定まる。

知 識 工 学

第 8 回「一階述語論理における推論(2):融合法」

一階述語論理 (9)

§9.5 融合法

これまで紹介した一階述語論理の推論方法は必ずしもどんな場合にでも証明できる方法ではなかった。命題論理で用いた融合法は一階述語論理においても適用することができ、融合法を用いれば、伴意関係にある一階述語論理の論理式は必ず証明できる。

融合法の手順は命題論理のときと同じである。融合法はその基本戦略として背理法を用いる。知識ベースをKBとし、質問をαとしたとき、$KB \wedge \neg\alpha$が充足不能であることを示すことで、$KB \vDash \alpha$を示す。

1. $KB \wedge \neg\alpha$を連言標準形(conjunctive normal form: CNF)に変換する。連言標準形は次の形をした文である。

$$(l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \cdots) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee \cdots) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee l_{n,2} \vee \cdots)$$

ただし、$l_{i,j}$はリテラルと呼ばれ、リテラルは原子文または原子文の否定のいずれかである。原子文は正リテラル、原子文の否定は負リテラルとも呼ばれる。$(l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \cdots)$は節と呼ばれる。$KB \wedge \neg\alpha$を CNF に変換した結果の節集合を$KB'$とする。

2. 節集合KB' (知識ベース+$\neg\alpha$) に対し融合規則を適用し、$KB' \vDash R$となるRをみつけRを節集合KB'に追加する(KB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3. 追加できる新しい節がない場合、KBからαを伴意しないことがわかる

4. 偽$(=0)$が得られたら、KBからαを伴意することがわかる

5. 2.に戻る

しかし、3 の追加できる新しい節が無い場合は伴意しないことがわかるが、このアルゴリズムは必ずしも停止するとは限らない。その場合は伴意するかどうかはわからない、ということになる。しかし、元々の知識ベースと質問の間に伴意関係が成り立っているのなら、このアルゴリズムは必ず停止する。

§9.5.1 連言標準形(CNF)への変形

最初のステップである CNF への変換について説明する。任意の一階述語論理の論理式は CNF に変換可能である。

CNF への変換手続きは次のようになる。命題論理の場合と違いがある箇所は赤字で示している。

1. $\alpha \Leftrightarrow \beta$を$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$に置き換えることで、$\Leftrightarrow$を除去する

2. $\alpha \Rightarrow \beta$を$\neg\alpha \vee \beta$に置き換えることで$\Rightarrow$を除去する

3. 次の論理的同値関係を使うことで否定($\neg$)を内側へいれていく
   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$　　(二重否定除去)
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$　　(ド・モルガンの法則)
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$　　(ド・モルガンの法則)
   $\neg\exists x\, P \equiv \forall x \neg P$
   $\neg\forall x\, P \equiv \exists x \neg P$

4. 変数標準化: $(\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, P(x))$のような同じ変数を 2 回使用する文に対して、一方の変数の名称を改名する。例えば、$(\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, P(x))$は$(\forall x\, P(x)) \vee (\exists y\, P(y))$とすればよい。

5. スコーレム化(存在限量子の除去): 次に存在限量子の除去を行う。簡単な場合には存在具体化(EI)と同じである。例えば、$\exists x\, P(x)$は$P(A)$と変換すればよい。ただし、Aは新しい定数である。しかし、例えば、$\forall x \exists y\, Love(x, y)$に対し、$\forall x\, Love(x, A)$としてしまうと、ある$A$があって、それを全ての$x$が愛する、という解釈になってしまう。本来任意の$x$ごとにある$y$が存在していることになっているわけだから、この定数Aはxに依存しているはずである。そこで、$\forall x\, Love(x, F(x))$として、この定数は$x$に依存する関数だとする。この$F$はスコーレム関数(Skolem function)と呼ばれる。

　スコーレム関数の引数は、全称的に限量化された変数のうち、対象の存在限量子をその範囲(スコープ)に含むもの全てとなる。つまり、ある存在限量子と変数$\exists y$に対し、

$$\cdots \forall x_1 \left(\cdots \forall x_2 \left(\cdots \forall x_n (\cdots \exists y\, P)\right)\right)$$

となる全ての変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$がスコーレム関数の引数となるということである。この場合、$\exists y$を消去するには、Pに含まれる全てのyを$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$に置き換えれば良いということである。ただしFは今まで使ったことのない関数記号でなければいけない。例えば、$\forall x \exists y [P(y) \wedge Q(x, y)]$をスコーレム化すると、

$$\forall x \left[P\left(F(x)\right) \wedge Q\left(x, F(x)\right)\right]$$

となる。また、対象の存在限量子をスコープに含む全称限量子が全く無い場合は、存在具体化で行ったように、関数ではなく定数として良い。ただし、定数は新しい定数でないといけない。

6. 全称限量子の除去: 次の規則により全ての全称限量子を論理式の一番外側に追いだす。

$$\forall x\, P(x) \wedge Q \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q)$$
$$\forall x\, P(x) \vee Q \equiv \forall x\, (P(x) \vee Q)$$

また、一番外側の全称限量子は省略されることが多いので注意(以下の証明においても省略する)。

7. 次の論理的同値関係を使うことで、$\vee$を$\wedge$に対して可能な限り分配する

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

以上の手続きによって CNF となる。

例: 「全ての動物を愛する人は誰かに愛されている」

$$\forall x\ [\forall y\ (Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y)) \Rightarrow \exists y\ Loves(y,x)]$$

$\forall x\ [\neg\forall y\ (Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y)) \lor \exists y\ Loves(y,x)]$ (含意の除去)
$\forall x\ [\neg\forall y\ (\neg Animal(y) \lor Loves(x,y)) \lor \exists y\ Loves(y,x)]$ (含意の除去)
$\forall x\ [\exists y \neg\ (\neg Animal(y) \lor Loves(x,y)) \lor \exists y\ Loves(y,x)]$ (否定を内側に入れる)
$\forall x\ [\exists y\ (Animal(y) \land \neg Loves(x,y)) \lor \exists y\ Loves(y,x)]$ (否定を内側に入れる)
$\forall x\ [\exists y\ (Animal(y) \land \neg Loves(x,y)) \lor \exists z\ Loves(z,x)]$ (変数名を書き換える)
$\forall x\ [\ (Animal(F(x)) \land \neg Loves(x,F(x))) \lor Loves(G(x),x)]$ (スコーレム化)
$\forall x\ \left[\ (Animal(F(x)) \lor Loves(G(x),x)) \land \left(\neg Loves\big(x,F(x)\big) \lor Loves(G(x),x)\right)\right]$ (分配律)

§9.5.2 融合推論規則

命題論理における融合規則に対応する一階述語論理のための融合規則が存在する。

・融合規則(一般)

$$\frac{l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor m \qquad \neg m' \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j}{SUBST\big(\theta, l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j\big)}$$

ただし、$UNIFY(m,m') = \theta$となる。例えば、

$$Animal(F(x)) \lor Loves(G(x),x) \text{と} \neg Loves(u,v) \lor \neg Kills(u,v)$$

を融合すると$\theta = \{u/G(x), v/x\}$で単一化し、

$$Animal(F(x)) \lor \neg Kills(G(x),x)$$

を得る。

§9.5.3 証明の例題

例:「アメリカ人が敵対国に武器を売るのは犯罪であると法律は述べている。Nono という国はアメリカの敵国であり、ミサイルをもっていて、そのすべてがアメリカ人の Colonel West により販売された。」

知識ベースKB:

$\forall x,y,z\ [American(x) \land Weapon(y) \land Sells(x,y,z) \land Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)]$

$\exists x\ [Owns(Nono,x) \land Missile(x)]$

$\forall x\ [Missile(x) \land Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)]$

$\forall x\ [Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)]$

$\forall x\ [Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)]$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$

質問Q: $Criminal(West)$

$KB \wedge \neg Q$の連言標準形(CNF):

R_1: $\neg American(x) \vee \neg Weapon(y) \vee \neg Sells(x,y,z) \vee \neg Hostile(z) \vee Criminal(x)$

R_2: $Owns(Nono, M)$

R_3: $Missile(M)$

R_4: $\neg Missile(x) \vee \neg Owns(Nono, x) \vee Sells(West, x, Nono)$

R_5: $\neg Missile(x) \vee Weapon(x)$

R_6: $\neg Enemy(x, America) \vee Hostile(x)$

R_7: $American(West)$

R_8: $Enemy(Nono, America)$

R_9: $\neg Criminal(West)$

証明:

R_{10}: $\neg American(West) \vee \neg Weapon(y) \vee \neg Sells(West,y,z) \vee \neg Hostile(z)$ (R_1とR_9より)

R_{11}: $\neg Weapon(y) \vee \neg Sells(West,y,z) \vee \neg Hostile(z)$ (R_7とR_{10}より)

R_{12}: $\neg Missile(y) \vee \neg Sells(West,y,z) \vee \neg Hostile(z)$ (R_5とR_{11}より)

R_{13}: $\neg Sells(West,M,z) \vee \neg Hostile(z)$ (R_3とR_{12}より)

R_{14}: $\neg Missile(M) \vee \neg Owns(Nono,M) \vee \neg Hostile(Nono)$ (R_4とR_{13}より)

R_{15}: $\neg Owns(Nono,M) \vee \neg Hostile(Nono)$ (R_3とR_{14}より)

R_{16}: $\neg Hostile(Nono)$ (R_2とR_{15}より)

R_{17}: $\neg Enemy(Nono, America)$ (R_6とR_{16}より)

R_{18}: 0 (R_8とR_{17}より)

従って、$KB \wedge \neg Q$が充足不能であることが示せたため、KBがQを伴意することを示せた。

例:「動物が好きな人は誰かに愛される。動物を殺す人は誰にも愛されない。Jack は全ての動物を愛する。Jack か Curiosity のどちらかが、Tuna という猫を殺した。Curiosity はその猫を殺したか?」

知識ベースKB:

$\forall x \left[\forall y \left(Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y)\right) \Rightarrow \exists y\, Loves(y,x)\right]$

$\forall x \left[\exists y \left(Animal(y) \wedge Kills(x,y)\right) \Rightarrow \forall z\, \neg Loves(z,x)\right]$

$\forall x\, [Animal(x) \Rightarrow Loves(Jack, x)]$

$Kills(Jack, Tuna) \vee Kills(Curiosity, Tuna)$

$Cat(Tuna)$

$\forall x\, [Cat(x) \Rightarrow Animal(x)]$

質問Q: $Kills(Curiosity, Tuna)$

$KB \wedge \neg Q$の連言標準形(CNF):
R_1: $Animal(F(x)) \vee Loves(G(x), x)$
R_2: $\neg Loves(x, F(x)) \vee Loves(G(x), x)$
R_3: $\neg Animal(y) \vee \neg Kills(x, y) \vee \neg Loves(z, x)$
R_4: $\neg Animal(x) \vee Loves(Jack, x)$
R_5: $Kills(Jack, Tuna) \vee Kills(Curiosity, Tuna)$
R_6: $Cat(Tuna)$
R_7: $\neg Cat(x) \vee Animal(x)$
R_8: $\neg Kills(Curiosity, Tuna)$

証明:
R_9: $Animal(Tuna)$ (R_6とR_7より)
R_{10}: $\neg Kills(x, Tuna) \vee \neg Loves(z, x)$ (R_3とR_9より)
R_{11}: $Kills(Jack, Tuna)$ (R_5とR_8より)
R_{12}: $\neg Loves(z, Jack)$ (R_{10}とR_{11}より)
R_{13}: $\neg Animal(F(Jack)) \vee Loves(G(Jack), Jack)$ (R_2とR_4より)
R_{14}: $Loves(G(Jack), Jack)$ (R_1とR_{13}より)
R_{14}: 0 (R_{12}とR_{14}より)
従って、$KB \wedge \neg Q$が充足不能であることが示せたため、KBがQを伴意することを示せた。
この証明は次の言葉で言い表すことができる。
「Curiosity が Tuna を殺さなかったとしよう。Jack か Curiosity がやったことはわかっている。従って、Jack がやったに違いない。さて、Tuna は猫であり、猫は動物であるので、Tuna は動物である。動物を殺すものは誰にも愛されないので、誰も Jack を愛さないことを知る。一方、Jack はすべての動物を愛するので、誰かが Jack を愛している。そこで、矛盾に達する。従って、Curiosity が猫を殺した。」
これらの推論は伴意関係が成り立つか成り立たないかの yes/no を返してくれるだけだが、一般には「誰が猫を殺したか？」という質問に対する答えを知りたいと思うこともあるだろう。その場合は、質問Qは$\exists w\ Kills(w, Tuna)$となり、$KB \wedge \neg Q$に対して、$R_8$が
R_8: $\neg Kills(w, Tuna)$
となる。これに対する推論は、
R_{11}: $Kills(Jack, Tuna)$ (R_5とR_8より)
を得る過程において、$\{w/Curiosity\}$とすればあとは同じとなる。従って、wは$Curiosity$だとわかる。このように質問における変数の束縛を記憶しておけば誰が？どれが？どこで？といった質問に対する答えを知ることができる。
しかし、このように存在を問う質問に対して融合法は構成的でない証明(nonconstructive proof)を作ることがある。例えば、
R_8: $\neg Kills(w, Tuna)$
に対し、次の証明が与えられうる。
R_9: $Kills(Jack, Tuna)$ (R_5とR_8より)

R_{10}:　0　　　(R_8とR_9より)
これはwに対して 2 回束縛が行われており、$w/Curiosity$か$w/Jack$であるかのどちらかであるということを言っていることになる。つまり、融合法は猫を殺したのは Curiosity か Jack のどちらかである、と告げてくれていることになる。しかし、もともと、Curiosity か Jack が猫を殺していることはわかっているのだから、このような解が得られることにはあまり意味がない。

　この問題に対する一つの解法は、与えられた証明中で質問変数が一度しか束縛されないように融合の制限をかけることである。そして、次の可能な解を求めるためにバックトラック(証明を巻き戻して別の束縛を与えて証明をやり直すこと)をする必要がある。

　この問題に対するもう一つの解法は、否定質問に特別な回答リテラル(answer literal)を加えて、$\neg Kills(w, Tuna) \vee Answer(w)$とすることである。このようにすると、上記の非構成的証明に対しては、$Answer(Curiosity) \vee Answer(Jack)$を生成するが、これは解を構成しない。つまり、
R_8:　$\neg Kills(w, Tuna) \vee Answer(w)$
に対し、
R_9:　$Kills(Jack, Tuna) \vee Answer(Curiosity)$　　　(R_5とR_8より)
R_{10}:　$Answer(Curiosity) \vee Answer(Jack)$　　　(R_8とR_9より)
となり、ここで偽$(= 0)$となることはないためである。

〇一階述語論理の証明（融合法）

1．$KB \land \neg\alpha$を連言標準形(conjunctive normal form：CNF)に変換する。連言標準形は次の形をした文である。

$$(l_{1,1} \lor l_{1,2} \lor \cdots) \land (l_{2,1} \lor l_{2,2} \lor \cdots) \land \cdots \land (l_{n,1} \lor l_{n,2} \lor \cdots)$$

ただし、$l_{i,j}$はリテラルと呼ばれ、リテラルは原子文または原子文の否定のいずれかである。原子文は正リテラル、原子文の否定は負リテラルとも呼ばれる。$(l_{i,1} \lor l_{i,2} \lor \cdots)$は節と呼ばれる。$KB \land \neg\alpha$を CNF に変換した結果の節集合を$KB'$とする。

2．節集合KB'に対し融合規則を適用し、$KB' \vDash R$となるRをみつけRを節集合KB'に追加する(KB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3．追加できる新しい節がない場合、KBからαを伴意しないことがわかる

4．偽$(= 0)$が得られたら、KBからαを伴意することがわかる

5．2.に戻る

〇融合法での推論規則（$KB \vdash R$）

融合法で用いる推論規則は融合規則ただ一つのみ

$$\frac{l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor m \qquad \neg m' \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j}{SUBST\left(\theta, l_1 \lor \cdots \lor l_i \lor n_1 \lor \cdots \lor n_j\right)} \qquad \text{(融合規則(一般))}$$

ただし、$UNIFY(m, m') = \theta$。

〇連言標準形(CNF)への変換

1．$\alpha \Leftrightarrow \beta$を$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)$に置き換えることで、$\Leftrightarrow$を除去する

2．$\alpha \Rightarrow \beta$を$\neg\alpha \lor \beta$に置き換えることで$\Rightarrow$を除去する

3. 次の論理的同値関係を使うことで否定($\neg$)を内側へいれていく

$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$　　(二重否定除去)

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$　　(ド・モルガンの法則)

$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$　　(ド・モルガンの法則)

$\neg\exists x\, P \;\equiv\; \forall x \neg P$

$\neg\forall x\, P \;\equiv\; \exists x \neg P$

4. 変数標準化: $(\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, P(x))$のような同じ変数を 2 回使用する文に対して、一方の変数の名称を改名する。例、$(\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, P(x))$を$(\forall x\, P(x)) \vee (\exists y\, P(y))$とする。

5. スコーレム化(存在限量子の除去): 存在限量子の除去を行う。ある存在限量子$\exists y$に対し、

$$\cdots \forall x_1 \left(\cdots \forall x_2 \left(\cdots \forall x_n (\cdots \exists y\, P)\right)\right)$$

となる全ての変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$を見つけ、Pに出現する全てのyを$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$と置き換えて$\exists y$を消去する。Fのことをスコーレム関数といい、Fは今まで使ったことのない新しい関数記号でなければいけない。また、存在限量子が全称限量子に囲まれていない場合は関数ではなく定数として良い。ただし、定数は新しい定数でなければいけない。

6. 全称限量子の除去: 次の規則により全ての全称限量子を論理式の一番外側に追いだす。

$$\forall x\, P(x) \wedge Q \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q)$$

$$\forall x\, P(x) \vee Q \equiv \forall x\, (P(x) \vee Q)$$

また、一番外側の全称限量子は省略されることが多いので注意。

7. 次の論理的同値関係を使うことで、$\vee$を$\wedge$に対して可能な限り分配する

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

知識工学

第 9 回「一階述語論理における推論(3)：融合法の完全性、等号、論理プログラミング」

一階述語論理 (9)

§9.5.4 融合法の完全性

融合法の完全性について説明をする。融合法の完全性を信じる人は読み飛ばしても良い。融合法は反駁完全(refutation completeness)である。すなわち、もし、一階述語論理の論理式が充足不能であるなら、融合法は必ず矛盾を導出することができる。これは背理法を想定しており、$KB \vDash Q$という伴意関係がもし成り立つならば、融合法は必ず証明に成功する、ということを意味している。

融合法は、$KB \vDash Q$が成り立つかどうかを示すために、$KB' = KB \wedge \neg Q$とし、KB'から矛盾(false)が導出されるかどうか調べる。KB'から矛盾が導出されれば背理法の仮定より$KB \vDash Q$が成り立つ。完全性を示すというここでの目標は、「KB'が充足不能であるならば、有限ステップで融合法は証明を終えることができる」ということを示すことである。

証明は次のステップにより示される。

1. エルブランの定理により充足不能な一階述語論理式には充足不能な命題論理式が存在することを示す。
2. 命題論理化された一階述語論理は、命題論理のための融合法により、有限時間でその判定を行うことができる。
3. 持ち上げ補題(lifting lemma)により、単一化を用いた一階述語論理のための融合法においても、命題論理のための融合法と等価な証明が存在することを示す。

〇エルブランの定理

融合法の完全性を示す上で最も重要な箇所はエルブランの定理である。エルブランの定理を説明するためにはまずいくつかの概念を導入しないといけない。

エルブラン領域 (Herbrand universe)：融合法では最初に一階述語論理の論理式を CNF に変換し、節集合を生成する。節集合Sに対し、Sのエルブラン領域H_Sは以下から作られる全ての基礎項の集合である。

1. S中の関数記号。
2. S中の定数記号。もし定数がないのなら定数記号A。

例：$S = \{\neg P(x, F(x, A)) \vee \neg Q(x, A) \vee R(x, B)\}$とする(節を一つだけ含む)。

$$H_S = \{A, B, F(A, A), F(A, B), F(B, A), F(B, B), F\big(A, F(A, A)\big), \cdots\}$$

つまり、節集合中で使われている全ての関数記号と定数記号を使って作ることのできる可能な項を全て列挙しているのがエルブラン領域である。

飽和(saturation)：Sを節集合とし、Pを基礎項の集合とする。S中の変数に対し、矛盾が起きない可能な基礎項を代入して基礎節を得ることを飽和という。Sに対しPから選んで飽和させるとき、$P(S)$と書く。

エルブラン基底(Herbrand base)：節集合Sのエルブラン領域に対する飽和はSのエルブラン基底と呼ばれ、$H_S(S)$と書かれる。
例：$S=\{\neg P(x,F(x,A))\vee\neg Q(x,A)\vee R(x,B)\}$とする(上記の例と同じ)。

$$\begin{gathered}H_S(S)=\{\neg P\big(A,F(A,A)\big)\vee\neg Q(A,A)\vee R(A,B),\\ \neg P\big(B,F(B,A)\big)\vee\neg Q(B,A)\vee R(B,B),\\ \neg P\big(F(A,A),F(F(A,A),A)\big)\vee\neg Q(F(A,A),A)\vee R(F(A,A),B),\\ \neg P\big(F(A,B),F(F(A,B),A)\big)\vee\neg Q(F(A,B),A)\vee R(F(A,B),B),\cdots\}\end{gathered}$$

エルブランの定理(Herbrand's theorem)：節集合Sが充足不能であるなら、充足不能な$H_S(S)$の有限部分集合が存在する。

節集合Sが充足不能なら、S中の変数にエルブラン領域の項を代入した基礎節(エルブラン基底)の中に充足不能な基礎節が存在する、ということである。つまり、Sが充足不能なら、うまくエルブラン領域の項を代入していけば、有限時間で充足不能なSの基礎節が得られる、ということである。基礎節には変数が含まれないので、命題論理と等価な論理式となる。命題論理における融合法は完全であることがわかっているので、元々の節集合が充足不能であるなら、矛盾を必ず導出することができる。

〇持ち上げ補題
命題論理に対する融合法ではなく、一階述語論理の融合法に対しても完全性が成り立つことを示さないといけない。そのため持ち上げ補題と呼ばれる補題がある。

持ち上げ補題(lifting lemma)：C_1とC_2を変数を共有しない二つの節とし、C_1'とC_2'をC_1とC_2の基底例とする。もし、C'がC_1'とC_2'の融合であるとすると、次のようなCが存在する。(1) CがC_1とC_2の融合であり、(2)C'がCの基底例である。

基底例	節
$\dfrac{C_1' \quad C_2'}{C'}$ (融合規則)	$\dfrac{C_1 \quad C_2}{C}$ (融合規則)

例：
$C_1=\neg P(x,F(x,A))\vee\neg Q(x,A)\vee R(x,B)$
$C_2=\neg N(G(y),z)\vee P(H(y),z)$
$C=\neg N\big(G(y),F(H(y),A)\big)\vee\neg Q(H(y),A)\vee R(H(y),B)$

$C_1'=\neg P(H(B),F(H(B),A))\vee\neg Q(H(B),A)\vee R(H(B),B)$
$C_2'=\neg N(G(B),F(H(B),A))\vee P(H(B),F(H(B),A))$
$C'=\neg N(G(B),F(H(B),A))\vee\neg Q(H(B),A)\vee R(H(B),B)$

従って、命題論理の融合法と一階述語論理の融合法には対応関係があり、命題論理の融合法において矛盾が導出されるなら、一階述語論理の融合法においても矛盾が導出される。従って、与えられた一階述語論理の論理式がもし充足不能であれば、一階述語論理の融合法において必ず矛盾が導出される。

§9.5.5 等号 (equality)

今まで等号に関する説明がなかったが、等号を扱うための 3 つのアプローチが存在する。1 つ目の方法は、等号無し一階述語論理に等号の公理を導入する方法である。

(同値関係の公理)

$$\forall x\,[x = x]$$
$$\forall x, y\,[x = y \Rightarrow y = x]$$
$$\forall x, y, z\,[x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z]$$

(述語の同値関係)

$$\forall x, y\,\left[x = y \Rightarrow \left(P_1(x) \Leftrightarrow P_1(y)\right)\right]$$
$$\forall x, y\,\left[x = y \Rightarrow \left(P_2(x) \Leftrightarrow P_2(y)\right)\right]$$
$$\cdots$$

(関数の同値関係)

$$\forall w, x, y, z\,\left[w = y \wedge x = z \Rightarrow \left(F_1(w, x) = F_1(y, z)\right)\right]$$
$$\forall w, x, y, z\,\left[w = y \wedge x = z \Rightarrow \left(F_2(w, x) = F_2(y, z)\right)\right]$$
$$\cdots$$

このように公理を加えることで等号付き一階述語論理を実現することができる。また、上記の公理は等号の性質に関するわかりやすい説明ともなっている。

2 つ目の方法は、等号を扱う推論規則を追加する方法である。ここでは二つ紹介する。

デモジュレーション (demodulation): $x = y$という節があれば、そのほかの節αにおいて含まれるxを全てyに置き換える方法。例えば、

$$Father\left(Father(x)\right) = PaternalGrandfather(x)$$
$$Birthdate\left(Father\left(Fahter(Bella)\right), 1926\right)$$

であったとき、

$$Birthdate(PaternalGrandfather(Bella), 1926)$$

と推論する方法である。次のようにデモジュレーションは定義される。任意の項x, yに対し、

$$\frac{x = y \qquad m_1 \vee \cdots \vee m_n}{SUB(SUBST(\theta, x), SUBST(\theta, y), m_1 \vee \cdots \vee m_n)}$$

ただし、$UNIFY(x, z) = \theta$で、zはm_iに出現する任意の項である。$SUB(x, y, m)$は、m中に含まれるxをyに置き換える操作である。

パラモジュレーション (paramodulation): デモジュレーションは$x = y$という形の節にしか適用できないが、これを一般の節の形に拡張することができる。任意の項x, yに対し、

$$\frac{l_1 \vee \cdots \vee l_k \vee x = y \qquad m_1 \vee \cdots \vee m_n}{SUB(SUBST(\theta, x), SUBST(\theta, y), SUBST(\theta, l_1 \vee \cdots \vee l_k \vee m_1 \vee \cdots \vee m_n)}$$

ただし、$UNIFY(x,z)=\theta$で、zはm_iに出現する任意の項である。パラモジュレーションは一階述語論理に対して完全な推論を与える。

3 つ目の方法は、単一化アルゴリズムを拡張して、等号推論を扱う方法である。例えば、$1+2=2+1$は一般に単一化できないが、$x+y=y+x$ということが成り立つことがわかっていれば単一化に成功する。

世の中に一階述語論理の定理証明器が多数存在し、優れたフリーソフトも多数存在している。これらを実際に用いれば、一階述語論理の推論の挙動を理解する大きな助けになるだろう。Otter, Prover9(Otter の後継), SPASS, E, Vampire, Waldmeister などがある。使いやすさの点から最初は Prover9 がおすすめである。

§9.4.2 論理プログラミング（logic programming）

一階述語論理をプログラミング言語として用いることができるように一階述語論理の表現に制限をかけ、推論をコントロールし、実行効率を非常に高くしたプログラミング言語を論理型プログラミング言語と呼ぶ。代表的な言語として Prolog が存在する。Prolog では次の形の節を持つ一階述語論理のみ扱う。

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n \Rightarrow h$$

ただし、各l_iおよびhは正リテラルである。これらの節はホーン節と呼ばれる。$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$はボディ(body)と呼ばれ、$h$はヘッド(head)と呼ばれる。ボディがない節を定義することができ、ヘッドhだけの節を定義することもできる($true \Rightarrow h$という形の節と考えても良い)。ヘッドだけから成る節はファクト(fact)と呼ばれる。ホーン節に対する証明は簡単で、後ろ向き推論と呼ばれる推論方法で質問から順に証明をすることができる。Prolog では、証明に失敗したときは、証明を巻き戻して他の解を探しにいくことを行う。この巻き戻しのことをバックトラックという。

Prolog には次のような制限や機能がついている。

単一名仮説（unique names assumption）: 異なる定数は異なるオブジェクトを指す。つまり、$John = Daniel$というのは常に単一化に失敗する。また、関数も同様であり、項に対する等号は、$f(x_1,\cdots,x_n) = f(y_1,\cdots,y_n)$かつ$x_1 = y_1,\cdots,x_n = y_n$となるときにのみ成り立つ。つまり、Prolog における等号の処理は二つの項を単一化することに等しい。

失敗による否定(negation as failure)と閉世界仮説(closed-world assumption): 正リテラルのみしか扱えないのは不便である。そこで、Prolog には失敗による否定が導入されている。これはボディに負リテラル$\neg l$が含まれるとき、lの証明をまず行い、もし、lの証明ができなかったときは$\neg l$の証明ができたことにし、lの証明ができたときには$\neg l$を証明できなかったことにする方法である。一階述語論理の否定とは異なる否定であることに注意。また、この結果、知識ベースに定義されていないファクトは全て否定されたファクトとして定義されていることになる。これは閉世界仮説と呼ばれる。

カット(cut): 証明に失敗したとき、証明を巻き戻して(バックトラック)、他の解を探しにいくことになるが、そのバックトラックを局所的に強制的に止めることができる。この処理のことをカットという。

カットを用いることで、プログラミング言語における if 文のような条件分岐処理を実現することができる。

Prolog ではホーン節$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n \Rightarrow h$を次のように表す。

$$h \text{ :- } l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n.$$

ファクトは次のように表す。

$$h.$$

変数の頭文字は大文字とし、述語、定数、関数の頭文字は小文字となるので注意。

例：

```
male(namihei).
male(katsuo).
male(tarao).
female(fune).
parent(namihei, katsuo).
parent(fune, katsuo).
father(X, Y) :- parent(X, Y), male(X).
```

実行例：

```
> ?- father(namihei, katsuo).
yes
> ?- father(namihei, tarao).
no
> ?- father(X, katsuo).
X: namihei
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
no
> ?- parent(X, katsuo).
X: namihei
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
X: fune
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
no
```

例：リストの append

```
append([], Y, Y).
append([A|X], Y, [A|Z]) :- append(X, Y, Z).
```

実行例:

```
> ?- append([1,2,3], [4,5,6], X).
X: < 1, 2, 3, 4, 5, 6 >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
no
> ?- append(X, Y, [1,2,3,4]).
X: < >
Y: < 1, 2, 3, 4 >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
X: < 1 >
Y: < 2, 3, 4 >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
X: < 1, 2 >
Y: < 3, 4 >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
X: < 1, 2, 3 >
Y: < 4 >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
X: < 1, 2, 3, 4 >
Y: < >
Enter ';' for more choices, otherwise press ENTER --> ;
no
```

知 識 工 学

第 10 回 「不 確 実 性」

§13 不確実性

§13 不確実性(Uncertainty)

§13.1 不確実性のもとでの行為

部分的観察、非決定性、組合せから生じる不確実性

制限条件記述問題 (qualification problem): 例外を全て列挙することは難しい

例: 私の車は空港まで 30 分で着く。もし、ガス欠にならなかったら、隕石が落ちてこなかったら、…

どのような結論をだすのが合理的か？

§13.1.1 不確実な知識の取り扱い

〇医学におけるルール記述の困難

◇条件の完全列挙の困難さ: 全ての完全な条件と結論を記述することが難しい

◇理論上の無知: 医学の領域に関しては完全な理論がない

◇実際上の無知: 原因を調べるための完全なテストを行えているとは限らない

$$Toothache \Rightarrow Cavity$$

とするのは誤り。歯が痛い時に虫歯(cavity)であるとは限らない。他にも歯茎の病気(gum disease)や、歯膿瘍(abscess)などがあり得る。よって、次のようにしなくてはいけない

$$Toothache \Rightarrow Cavity \lor GumDiseasese \lor Abscess \ldots$$

$$Cavity \Rightarrow Toothache$$

としても誤りで、全ての虫歯が必ずしも痛みを伴うとも限らない。

〇信念の強さ

文自体は実際には真か偽のいずれかであり、それを信じる強さを確率として定義する。c.f.　真偽の強さに関してはファジィ理論など

論理: 偽、未知、真

信念の強さ: 0(偽) 〜 1 (真)

観測(より多くの証拠)によって確率が変化する

例: シャッフルしたトランプのカードをあてる。何も情報がなければそれぞれのカードに 1/52 の確率を

与える。カードをみてしまえば、その確率は 0 か 1 になる。

§13.1.2 不確実性と合理的意思決定

意思決定理論 (decision theory)

意思決定理論 = 確率論 + 効用理論

飛行機に乗るため空港に到着するためのプランの作成：可能な限り短い時間で到着するプランが良いか、余裕のあるプランが良いのか？

効用(utility)：待ち時間や間に合わなかったときのペナルティを要素として、プランの良さを数値化したもの。効用関数。

エージェントが合理的 ⇔可能な行為の中から期待効用が最も高い行為を選択

§13.2 確率の基本的な記法

§13.2.1 確率について

標本空間Ω：全ての可能世界ωの集合。例：サイコロ二つに対して 36 個の可能世界。

可能世界：世界の完全な記述。互いに排他的かつ網羅的である。

全ての$\omega \in \Omega$に対し、$0 \leq P(\omega) \leq 1$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

事象：命題で記述される可能世界の集合。

命題ϕに対する確率

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

例：二つのサイコロA, Bに対し、$P(\text{合計が } 11) = P(A\text{が } 5 \text{ かつ} B\text{が } 6)) + P(A\text{が } 6 \text{ かつ} B\text{が } 5) = 1/36 + 1/36 = 1/18$

事前確率 (無条件確率) $P(a)$：何も情報が無い場合の命題aに対する信念の度合い。

例：虫歯を持っているという事前確率

$$P(cavity) = 0.1$$

事後確率(条件付確率) $P(a|b)$：証拠(evidence) bが与えられた時のaの確率

例：歯痛があったときの虫歯の確率

$$P(cavity|toothache) = 0.6$$

$$P(a|b) = P(a \land b)/P(b) \;\; s.t. P(b) > 0 \;\; \Leftrightarrow \; P(a \land b) = P(a|b)P(b)$$

§13.2.2 確率つき命題の言語

命題論理と制約充足表現に対する確率モデル

可能世界は、変数と値の対の集合で表現される。

確率変数 (random variable)

定義域 (domain): 確率変数が取り得る値の範囲

- ◇ 論理確率変数 (boolean random variable): 真$(=1)$か偽$(=0)$の定義域を持つ確率変数。例: $Cavity$。省略表現: $Cavity = 1$を$cavity$、$Cavity = 0$を$\neg cavity$
- ◇ 離散確率変数 (discrete random variable): 離散値を定義域として持つ確率変数。例: 離散確率変数$Weather$の定義域 $\{sunny, rainy, cloudy, snow\}$。混乱がなければ$Weather = snow$を$snow$と略す。
- ◇ 連続確率変数 (continuous random variable): 実数値を定義域とする確率変数。

例:

$Cavity$は論理確率変数

Ageの定義域$\{juvenile, teen, adult\}$

$$P(cavity|\neg toothache \wedge teen) = 0.1$$

確率分布 (probability distribution): 離散確率変数の全ての値の確率をひとまとめにして表現するために表を用いる。

例

$$P(Weather = sunny) = 0.7$$
$$P(Weather = rain) = 0.2$$
$$P(Weather = cloudy) = 0.08$$
$$P(Weather = snow) = 0.02$$

に対して、

$Weather$	$P(Weather)$
$sunny$	0.7
$rain$	0.2
$cloudy$	0.08
$snow$	0.02

と書く。

結合確率分布 (joint probability distribution): $P(Weather, Cavity)$のように、複数の確率変数を並べ全ての組合せの確率を表す。$P(Weather, Cavity)$は 8 行(=4×2 行)3 列の表で表せる。

完全結合確率分布 (full joint probability distribution): 世界を構成する全ての確率変数に対する結合確率分布

連続確率変数を含む場合は表では表せない。確率密度関数を用いて表記。

$$P(NoonTemp = x) = f(x)$$

§13.2.3 確率論の公理

公理

1. 全てのωに対し、$0 \leq P(\omega) \leq 1$
2. $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
3. 命題ϕに対する確率 $P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$

定理

1. $P(\neg a) = 1 - P(a)$
2. $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

コルモゴロフの公理: 公理 1,2 定理 2

知 識 工 学

第 11 回「完全結合確率分布による推論」

不確実性（13 章）

§13.3 完全結合確率分布を用いた推論

$Toothache$（歯痛），$Cavity$（虫歯），$Catch$（歯医者の不快なさぐり針が痛い歯にひっかかる）という三つの論理確率変数に対する完全結合分布

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

虫歯または歯痛である確率

$$P(cavity \lor toothache) = 0.008 + 0.072 + 0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108 = 0.28$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

周辺化（marginalization）：確率変数$X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n$に対し、

$$P(X_1, \cdots, X_m) = \sum_{Y_1, \cdots, Y_n} P(X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n)$$

例：$P(cavity) = 0.008 + 0.072 + 0.012 + 0.108 = 0.2$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

条件付確率

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \land toothache)}{P(toothache)} = \frac{0.012 + 0.108}{0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108} = 0.6$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

$$P(\neg cavity|toothache)=\frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}=0.4$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

$Cavity$ に関しての計算ではどちらでも、$1/P(toothache)$ が定数としてかけられていて、$P(Cavity|toothache)$の総和が1になる。この定数のことを正規化(normalization)定数と呼ぶ。正規化定数を表すのにαを用いる。

$$\begin{aligned}P(Cavity|toothache) &= \alpha P(Cavity, toothache)\\ &= \alpha[P(Cavity, toothache, catch)+P(Cavity, toothache, \neg catch)]\end{aligned}$$

$Cavity$	$P(Cavity, toothache)$	$P(Cavity|toothache)$
0	0.12	0.6
1	0.08	0.4

Xを質問の確率変数、$E_1,\cdots,E_m$を証拠の確率変数とし、$e_1,\cdots e_m$を$E_1,\cdots,E_m$の観測値とする。$Y_1,\cdots,Y_n$を残りの非観測変数の集合としたとき、

$$P(X|e_1,\cdots e_m)=\alpha P(X,e_1,\cdots e_m)=\alpha\sum_{Y_1,\cdots,Y_n}P(X,e_1,\cdots e_m,Y_1,\cdots,Y_n)$$

§13.4 独立

完全結合確率分布がわかっていれば、任意の離散確率変数の確率分布を得ることができる。

完全結合確率分布の問題点：確率変数の数に対し、指数オーダーの表が必要。実際には数百や数千といった確率変数が存在するので、求めることはほぼ不可能。

〇独立性の仮定

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy)=P(cloudy|toothache, catch, cavity)P(toothache, catch, cavity)$$

しかし、歯痛や虫歯が天気に影響を及ぼすことはおよそありえない。従って、

$$P(cloudy|toothache, catch, cavity)=P(cloudy)$$

と仮定する。すると、

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy) = P(cloudy)P(toothache, catch, cavity)$$

となる。

命題aとbの独立性: $P(a|b) = P(a) \quad or \quad P(b|a) = P(b) \quad or \quad P(a \wedge b) = P(a)P(b)$

確率変数の独立性: $P(X|Y) = P(X) \quad or \quad P(Y|X) = P(Y) \quad or \quad P(X,Y) = P(X)P(Y)$

独立性の例: コイントス　$P(C_1, \cdots, C_n) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i)$

§13.5 ベイズ規則とその使用法

$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$より

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)} \qquad (\text{ベイズ規則, Bayes' rule})$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

ある証拠$e_1, \cdots, e_n$に対して、

$$P(Y|X, e_1, \cdots, e_n) = \frac{P(X|Y, e_1, \cdots, e_n)P(Y|e_1, \cdots, e_n)}{P(X|e_1, \cdots, e_n)}$$

§13.5.1 ベイズ規則の適用: 単純なケース

〇因果モデルと診断モデル

因果モデル: $P(effect|cause)$

診断モデル: $P(cause|effect)$

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

§13.5.2 ベイズ規則の適用：証拠の組合せ

〇条件付き独立性

$$P(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha P(toothache \wedge catch|Cavity)P(Cavity)$$

$toothache$と$catch$は独立ではない。しかし、虫歯が存在しているかどうかが与えられたのなら、これらの二つは独立している。従って、

$$P(toothache \wedge catch|Cavity) = P(toothache|Cavity)P(catch|Cavity)$$

が成り立つ。

条件付き独立性: $P(X,Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z) \quad or \quad P(X|Y,Z) = P(X|Z) \quad or \quad P(Y|X,Z) = P(Y|Z)$

例

$P(Toothache, Catch, Cavity)$

$= P(Toothache, Catch|Cavity)P(Cavity)$

$= P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)P(Cavity)$

条件付の独立性の表明は、変数が増えても確率的なシステムを実現可能にし、さらに、それらの条件付独立性は絶対的独立性よりもはるかに多くの場合で成立する。

〇単純ベイズ (naïve Bayes)

$$P(Cause, Effect_1, \cdots, Effect_n) = P(Cause)\prod_i P(Effect_i|Cause)$$

このモデルによる識別器(classifier)はベイズ識別器(Bayesian classifier)と呼ばれる。

知 識 工 学

第 12 回「ベイジアンネット」

確率推論 (14 章)

§14.1 不確実な領域における知識表現

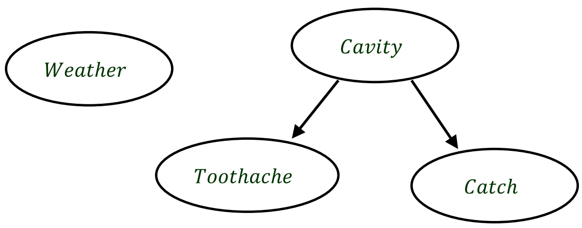
ベイジアンネット: 完全結合確率分布を表現する確率変数間の依存関係を表す非循環有向グラフ(DAG)。有向グラフィカルモデルとも呼ばれる。

・ノードは確率変数に対応

・$X \rightarrow Y$: XはYの親ノード。XはYに直接の影響を持つ。独立や条件付き独立の関係を表す。

・各ノードX_iは$P(X_i|Parents(X_i))$を持つ。

例: 13 章の虫歯の例



$Weather$は独立。$Toothache$と$Catch$は$Cavity$が与えられた時に条件付き独立。

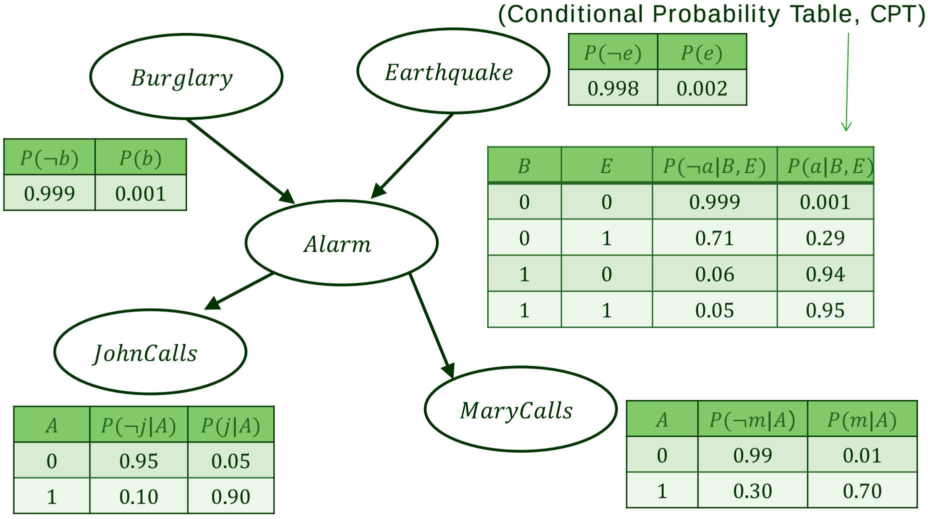
例: 防犯アラーム

防犯アラーム: 泥棒を検知する。稀に地震にも反応してしまう

ジョン: 隣人でアラームが鳴ったらあなたに電話してもらう。時々電話と混同。

メアリー: 〃。大音量の音楽好きで時々アラームに気づかない。

条件付き確率表
(Conditional Probability Table, CPT)



$P(\neg b)$	$P(b)$
0.999	0.001

$P(\neg e)$	$P(e)$
0.998	0.002

B	E	$P(\neg a\|B,E)$	$P(a\|B,E)$
0	0	0.999	0.001
0	1	0.71	0.29
1	0	0.06	0.94
1	1	0.05	0.95

A	$P(\neg j\|A)$	$P(j\|A)$
0	0.95	0.05
1	0.10	0.90

A	$P(\neg m\|A)$	$P(m\|A)$
0	0.99	0.01
1	0.30	0.70

泥棒と地震はアラームが鳴り出す確率に直接影響を与える。
ジョンとメアリーはアラームに対してのみ直接影響を受ける

条件付き確率表(Conditional Probability Table, CPT)：親ノードの値の組合せに対する条件付き確率。K個の親ノードに対し、2^K個の確率値を持つ。確率変数は省略のため 1 文字で表現している。また、論理確率変数に対しては偽に対する確率値は省略されることが多い。$P(X|Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$に対し、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$の値の組合せを縦方向に展開し、$X$の値を横方向に展開して表を作成することが多い。このように表を作成すると、各行の合計値が 1 になる。

§14.2 ベイジアンネットの意味論
§14.2.1 完全結合分布の表現
$P(X_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge X_n = x_n)$を$P(x_1, \cdots, x_n)$と略記する

$$P(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P\big(x_i \big| parents(x_i)\big)$$

ただし、$parents(x_i)$は$Parents(X_i)$に含まれる変数の具体的な値の組

例：アラームが鳴り(a)、しかし、泥棒(b)も入らず、地震(e)も起きずに、ジョン(j)とメアリー(m)が電話をする確率
$P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e) = P(j|a)P(m|a)P(a|\neg b \wedge \neg e)P(\neg b)P(\neg e) = 0.90 \times 0.70 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.998$
$= 0.000628$

○ベイジアンネットを構築するための方法
・チェインルール
$P(x_1, \cdots, x_n)$
$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}, \cdots, x_1)$
$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}|x_{n-2}, \cdots, x_1)P(x_{n-2}, \cdots, x_1)$
…
$= P(x_n|x_{n-1}, \cdots, x_1)P(x_{n-1}|x_{n-2}, \cdots, x_1) \cdots P(x_2|x_1)P(x_1)$
$= \prod_{i=1}^{n} P(x_i|x_{i-1}, \cdots, x_1)$

$Parents(X_i) \subseteq \{X_{i-1}, \cdots, X_1\}$が成り立つとき(ノード ID をうまくふれば満たせる)、

$$P(X_i|X_{i-1}, \cdots, X_1) = P(X_i|Parents(X_i))$$

という条件付き独立性を導入したのがベイジアンネット。完全結合確率分布と正しく対応することがわかる。

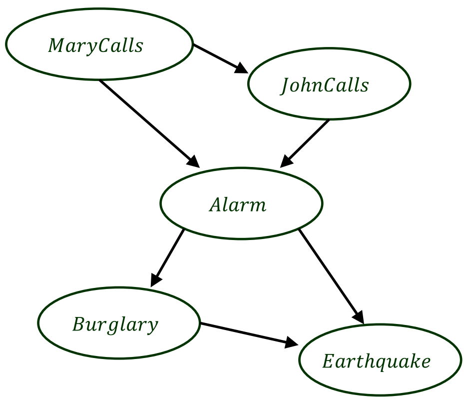
$$P(MaryCalls|JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary) = P(MaryCalls|Alarm)$$

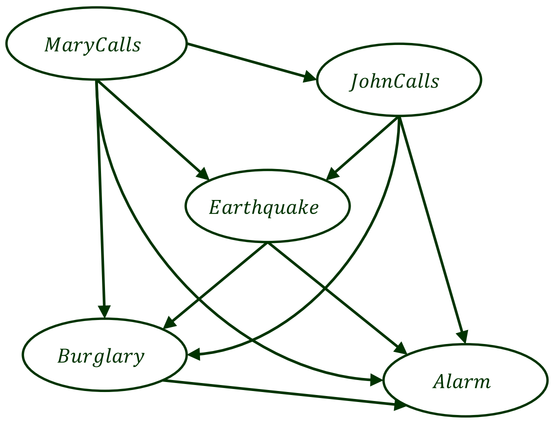
チェインルールによるベイジアンネットの構築例

$$P(MaryCalls, JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary)$$
$$= P(MaryCalls|JohnCalls, Alarm, Earthquake, Burglary)$$
$$\times P(JohnCalls|Alarm, Earthquake, Burglary) \times P(Alarm|Earthquake, Burglary)$$
$$\times P(Earthquake|Burglary) \times P(Burglary)$$
$$= P(MaryCalls|Alarm) \times P(JohnCalls|Alarm) \times P(Alarm|Earthquake, Burglary)$$
$$\times P(Earthquake) \times P(Burglary)$$

○コンパクト性とノードの順序化

ベイジアンネットの構築の方法は一通りだけではない。任意の順番にノードを追加できる(チェインルール)





最初に作ったベイジアンネットに比べ矢印の数が多い⇒CPT が大きくなる

・ノードを追加する良い手順

因果モデル: $P(effect|cause)$

診断モデル:$P(cause|effect)$

診断モデルよりも因果モデルを優先する方が良いベイジアンネットが得られる。(独立性や条件付き独立性の仮定が得られやすいため)

つまり、根本原因を最初に加え、次にそれらが影響する変数を加える、ということを繰り返す。

§14.2.2 ベイジアンネットにおける条件付き独立性

トポロジカルな意味論その 1

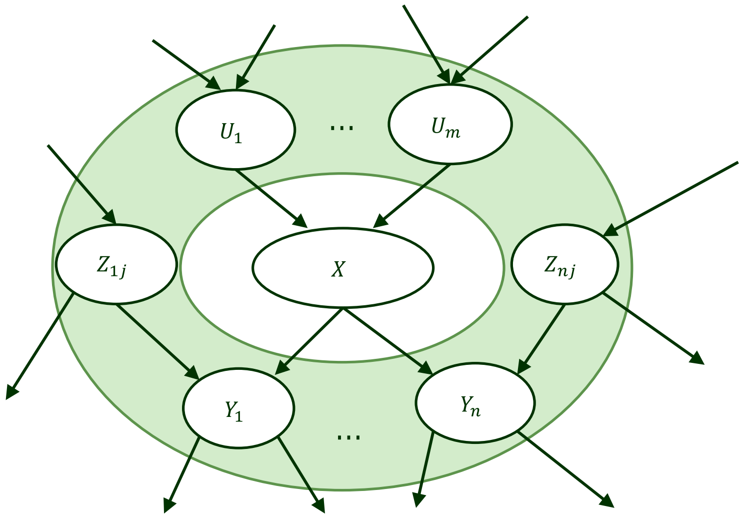
・各ノードは、その親ノードの値が与えられれば、その子孫でないノードと条件付き独立である。

この条件付き独立の命題と CPT から、完全結合分布が再構築できる。(数値的な意味論とトポロジカルな意味論が等価)

トポロジカルな意味論その 2

・各ノードは、マルコフブランケット(その親と子、子の親)の値が与えられれば、ネットワーク内の他の

全てのノードと条件付き独立になる。



知 識 工 学

第 13 回「ベイジアンネットのコンパクト化と厳密推論」

確率推論 (14 章)

§14.3 条件付き確率分布の効率的な表現

親の数をkとしたとき、CPT のサイズは $O(2^k)$となってしまう

〇基準的な分布(canonical distribution)

分布を決定するパターンといくつかのパラメータを与えることで CPT を再現

決定的なノード: 親の値によって、子の値が不確実性なく論理的に与えられる。

例

親ノード: $Canadian, US, Mexican$

子ノード: $NorthAmerican$

親ノード: 複数の車のディーラーの価格

子ノード: ユーザーの購入価格(最低価格を常に選択)

親ノード: 湖への流入水量，流出量

子ノード: 湖の水位

Noisy-OR モデル: 不確実な論理和のモデル。ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力が独立に与えられる確率モデル。

仮定 1) 原因が親によって全て列挙されている

仮定 2) ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力は他の親ノードに対し独立に与えられる。(各親ノードに対する中間ノードを定義し、中間ノードの論理和により子ノードの真偽を決定的に与えるモデルと等価)

$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \cdots \quad X_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$

$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \cdots \quad Z_n \rightarrow Y$ (論理和による決定的ノード)

例

親ノード：$Cold$，Flu，$Malaria$，子ノード：$Fever$

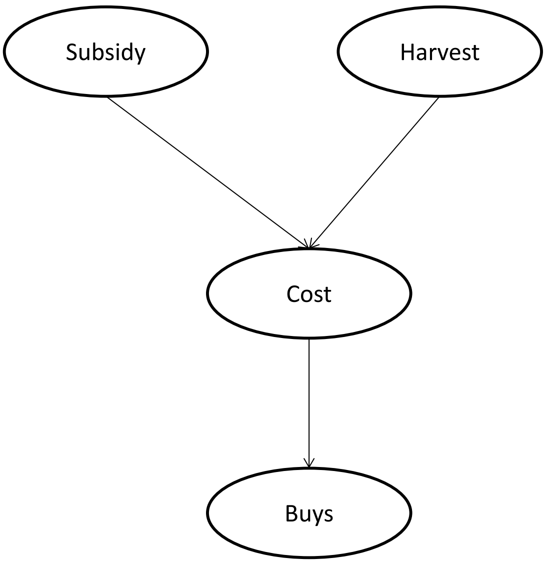
$$q_{malaria} = P(\neg fever|\neg cold, \neg flu, malaria) = 0.1$$
$$q_{flu} = P(\neg fever|\neg cold, flu, \neg malaria) = 0.2$$
$$q_{cold} = P(\neg fever|cold, \neg flu, \neg malaria) = 0.6$$

$$P(\neg y|X_1, \cdots, X_n) = \prod_{\{j:X_j=1\}} q_j$$
$$P(y|X_1, \cdots, X_n) = 1 - P(\neg y|X_1, \cdots, X_n)$$

CPT

$Cold$	Flu	$Malaria$	$P(\neg fever)$	$P(fever)$
0	0	0	1.0	0.0
0	0	1	$\mathbf{0.1}$	0.9
0	1	0	$\mathbf{0.2}$	0.8
0	1	1	$0.02 = 0.2 \times 0.1$	0.98
1	0	0	$\mathbf{0.6}$	0.4
1	0	1	$0.06 = 0.6 \times 0.1$	0.94
1	1	0	$0.12 = 0.6 \times 0.2$	0.88
1	1	1	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$	0.988

ハイブリッドベイジアンネット：離散変数と連続変数の両方を持つベイジアンネット



論理確率変数：$Subsidy$(助成金)，$Buys$(購入)

連続確率変数：$Harvest$（収穫量)，$Cost$(価格)

◇離散変数と連続変数に対する連続変数の確率分布

線形ガウス分布による収穫量hに対する価格cの確率分布

$$P(c|h, subsidy) = N(a_t h + b_t, \sigma_t^2)(c) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h + b_t)}{\sigma_t}\right)^2}$$

$$P(c|h, \neg subsidy) = N\left(a_f h + b_f, \sigma_f^2\right)(c) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_f h + b_f)}{\sigma_f}\right)^2}$$

◇連続変数に対する離散変数の確率分布

ある一定以上の値なら 1 に、以下なら 0 に近い確率分布

正規分布の累積分布関数（プロビット分布）

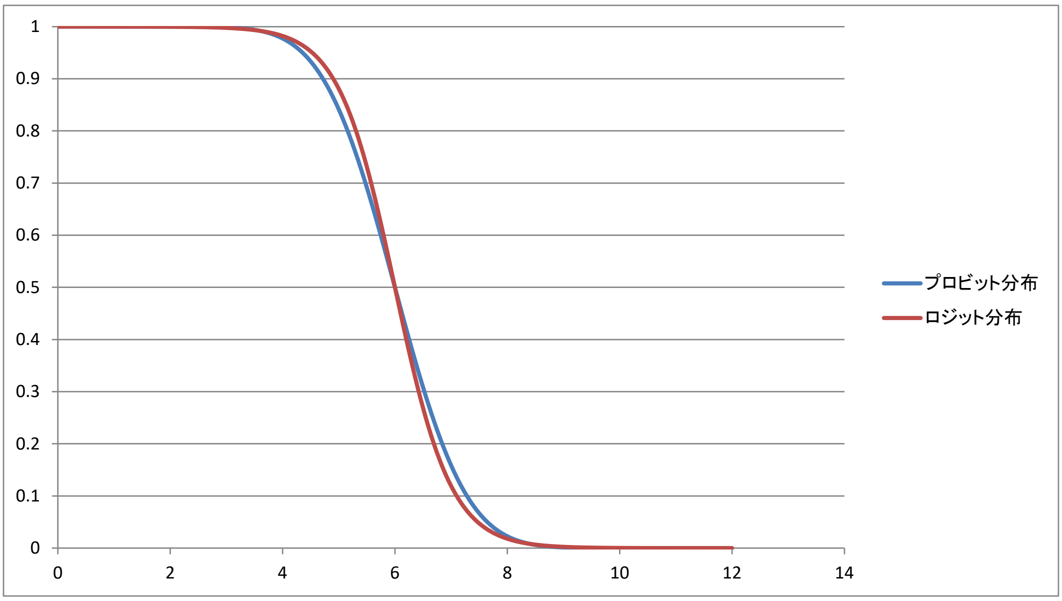
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} N(0,1)(x)dx$$

$$P(buys|Cost = c) = \Phi\left(\frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$

ロジスティック関数(ロジット分布)

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$P(buys|Cost = c) = \Phi\left(2\frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$



§14.4 ベイジアンネットの厳密推論

推論：特定の観測事象$e_1, \cdots, e_n$が与えられたもとで、質問変数Xの事後確率分布$P(X|e_1, \cdots, e_n)$を計算すること。観測事象$e_1, \cdots, e_n$は証拠変数の集合$E_1, \cdots, E_n$に値を割り当てたもの。

全ての変数集合：$\{X\} \cup \{E_1, \cdots, E_n\} \cup \{Y_1, \cdots, Y_m\}$

$Y_1, \cdots, Y_m$：隠れ変数(非証拠、非質問の変数集合)

例

$$P(Burglary|JohnCalls = true, MaryCalls = true)$$

$P(\neg b|j,m)$	$P(b|j,m)$
0.716	0.284

§14.4.1 列挙による推論

$$P(X|e_1, \cdots, e_n) = \alpha P(X, e_1, \cdots, e_n) = \alpha \sum_{Y_1, \cdots, Y_m} P(X, e_1, \cdots, e_n, Y_1, \cdots, Y_m)$$

ベイジアンネットを使って$P(X, e_1, \cdots, e_n, Y_1, \cdots, Y_m)$を求めて$P(X|e_1, \cdots, e_n)$を計算すれば良い。

例

$$P(Burglary|JohnCalls = 1, MaryCalls = 1)$$

$$P(B|j,m) = \alpha P(B,j,m) = \alpha \sum_E \sum_A P(B,j,m,E,A)$$

時間計算量 $O(n2^n)$

$$\begin{aligned} P(b|j,m) &= \alpha \sum_E \sum_A P(b)P(E)P(A|b,E)P(j|A)P(m|A) = \alpha P(b) \sum_E P(E) \sum_A P(A|b,E)P(j|A)P(m|A) \\ &= \alpha P(b)\big\{P(e)\big(P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) + \ P(\neg a|b,e)P(j|\neg a)P(m|\neg a)\big) \\ &+ P(\neg e)(P(a|b,\neg e)P(j|a)P(m|a) \ + \ P(\neg a|b,\neg e)P(j|\neg a)P(m|\neg a))\big\} \\ &= \alpha 0.001 \times (0.002 \times (0.95 \times 0.90 \times 0.70 + 0.05 \times 0.05 \times 0.01) + 0.998 \times (0.94 \times 0.90 \\ &\times 0.70 + 0.06 \times 0.05 \times 0.01)) = \alpha 0.00059224 \end{aligned}$$

同様に$P(\neg b|j,m)$を求める

$$P(\neg b|j,m) = \alpha 0.00149191$$

よって、$P(B|j,m)$は次のようになる。

$P(\neg b|j,m)$	$P(b|j,m)$
0.716	0.284

時間計算量：$O(2^n)$

知 識 工 学

第 14 回「ベイジアンネットの厳密推論と近似推論」

確率推論 (14 章)

§14.4.2 変数消去アルゴリズム

同じ計算を二度しないように工夫する動的計画法の一種

$$P(B|j,m) = \alpha \underbrace{P(B)}_{f_1(B)} \sum_E \underbrace{P(E)}_{f_2(E)} \sum_A \underbrace{P(A|B,E)}_{f_3(A,B,E)} \underbrace{P(j|A)}_{f_4(A)} \underbrace{P(m|A)}_{f_5(A)}$$

式の注釈付けしたパートを因子(factor)と呼ぶ。因子は確率分布の表として表される。

A	$f_4(A)\ \left(= P(j\|A)\right)$
0	0.05
1	0.90

A	$f_5(A)\ \left(= P(m\|A)\right)$
0	0.01
1	0.70

$$P(B|j,m) = \alpha f_1(B) \times \sum_E f_2(E) \times \sum_A f_3(A,B,E) \times f_4(A) \times f_5(A)$$

$$\begin{aligned} f_6(B,E) &= \sum_A f_3(A,B,E) \times f_4(A) \times f_5(A) \\ &= f_3(a,B,E) \times f_4(a) \times f_5(a) + f_3(\neg a,B,E) \times f_4(\neg a) \times f_5(\neg a) \end{aligned}$$

$$P(B|j,m) = \alpha f_1(B) \times \sum_E f_2(E) \times f_6(B,E)$$

$$\begin{aligned} f_7(B) &= \sum_E f_2(E) \times f_6(B,E) \\ &= f_2(e) \times f_6(B,e) + f_2(\neg e) \times f_6(B,\neg e) \end{aligned}$$

$$P(B|j,m) = \alpha f_1(B) \times f_7(B)$$

〇因子に対する操作

$$f\left(X_1 \cdots X_j, Y_1 \cdots Y_k, Z_1 \cdots Z_l\right) = f_1\left(X_1 \cdots X_j, Y_1 \cdots Y_k\right) \times f_2(Y_1 \cdots Y_k, Z_1 \cdots Z_l)$$

A	B	$f_1(A,B)$	B	C	$f_2(B,C)$	A	B	C	$f_3(A,B,C)$
0	0	0.1	0	0	0.4	0	0	0	$0.1 \times 0.4 = 0.04$
0	1	0.9	0	1	0.6	0	0	1	$0.1 \times 0.6 = 0.06$
1	0	0.7	1	0	0.8	0	1	0	$0.9 \times 0.8 = 0.72$
1	1	0.3	1	1	0.2	0	1	1	$0.9 \times 0.2 = 0.18$
						1	0	0	$0.7 \times 0.4 = 0.28$
						1	0	1	$0.7 \times 0.6 = 0.42$
						1	1	0	$0.3 \times 0.8 = 0.24$
						1	1	1	$0.3 \times 0.2 = 0.06$

$$f(B,C) = \sum_A f_3(A,B,C) = f_3(\neg a, B, C) + f_3(a, B, C)$$

B	C	$f_3(\neg a,B,C)$	$f_3(a,B,C)$	$f(B,C)$
0	0	0.04	0.28	0.32
0	1	0.06	0.42	0.48
1	0	0.72	0.24	0.96
1	1	0.18	0.06	0.24

〇防犯アラームの具体的な解き方

従って、防犯アラームの例は具体的には次のようにして解くことができる。

因子を次のようにおく。

$$P(B|j,m) = \alpha \underbrace{P(B)}_{f_1(B)} \sum_E \underbrace{P(E)}_{f_2(E)} \sum_A \underbrace{P(A|B,E)}_{f_3(A,B,E)} \underbrace{P(j|A)}_{f_4(A)} \underbrace{P(m|A)}_{f_5(A)}$$

B	$f_1(B)\left(= P(B)\right)$
0	0.999
1	0.001

E	$f_2(E)\left(= P(E)\right)$
0	0.998
1	0.002

A	B	E	$f_3(A,B,E)\ (= P(A\|B,E))$
0	0	0	0.999
0	0	1	0.71
0	1	0	0.06
0	1	1	0.05
1	0	0	0.001
1	0	1	0.29
1	1	0	0.94
1	1	1	0.95

A	$f_4(A)\ (= P(j\|A))$
0	0.05
1	0.90

A	$f_5(A)\ (= P(m\|A))$
0	0.01
1	0.70

A	B	E	$f_3(A,B,E)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$	$f_3(A,B,E) \times f_4(A) \times f_5(A)$
0	0	0	0.999	0.05	0.01	0.0004995
0	0	1	0.71	0.05	0.01	0.000355
0	1	0	0.06	0.05	0.01	0.00003
0	1	1	0.05	0.05	0.01	0.000025
1	0	0	0.001	0.90	0.70	0.00063
1	0	1	0.29	0.90	0.70	0.1827
1	1	0	0.94	0.90	0.70	0.5922
1	1	1	0.95	0.90	0.70	0.5985

$$
\begin{aligned}
f_6(B,E) \quad &= \sum_A f_3(A,B,E) \times f_4(A) \times f_5(A) \\
&= f_3(a,B,E) \times f_4(a) \times f_5(a) + f_3(\neg a,B,E) \times f_4(\neg a) \times f_5(\neg a)
\end{aligned}
$$

B	E	$f_6(B,E)$
0	0	$0.0004995 + 0.00063 = 0.0011295$
0	1	$0.000355 + 0.1827 = 0.183055$
1	0	$0.00003 + 0.5922 = 0.59223$
1	1	$0.000025 + 0.5985 = 0.598525$

B	E	$f_2(E)$	$f_6(B,E)$	$f_2(E) \times f_6(B,E)$
0	0	0.998	0.0011295	0.001127241
0	1	0.002	0.183055	0.00036611
1	0	0.998	0.59223	0.59104554
1	1	0.002	0.598525	0.00119705

$$\begin{aligned} f_7(B) &= \sum_E f_2(E) \times f_6(B,E) \\ &= f_2(e) \times f_6(B,e) + f_2(\neg e) \times f_6(B,\neg e) \end{aligned}$$

B	$f_7(B)$
0	$0.001127241 + 0.00036611 = 0.001493351$
1	$0.59104554 + 0.00119705 = 0.59224259$

$$P(B|j,m) \quad = \alpha f_1(B) \times f_7(B)$$

B	$f_1(B)$	$f_7(B)$	$f_1(B) \times f_7(B)$	$P(B\|j,m)$
0	0.999	0.001493351	0.001491857649	0.715828
1	0.001	0.59224259	0.00059224259	0.284172

§14.4.3 厳密推論の計算量

多重木(polytree)：任意の二つのノード間に多くても一つの無向パスしか存在しないネットワーク。単結合ネットワーク。

多重木の計算量：CPT の項目総数に対し線形。親の数が定数で制限→ノード数に対し線形。

複結合ネットワーク：向きを考慮しない場合にループが存在するネットワーク

複結合ネットワークの計算量：指数的な時間・空間的計算量。#P 困難。

§14.5 ベイジアンネットの近似推論

基本的にベイジアンネットの厳密推論には、ノード数に対し指数的な時間を必要とする。また、動的計画法などの実装も簡単ではない。そこで、近似的に推論をする方法を導入する。ここでは、ランダムサンプリングアルゴリズム(またはモンテカルロアルゴリズム)と呼ばれる方法を紹介する

§14.5.1 ダイレクトサンプリング法

○棄却サンプリング

0から1の間の乱数が生成されるとする。すると、この乱数を用いて、ベイジアンネットの確率分布に従ったサンプル(全確率変数に対する具体的な値)を生成することができる。推論式$P(X|e_1,\cdots,e_n)$を計算するには、サンプリングを繰り返して、次の計算を行えば良い。

$$P(X|e_1,\cdots,e_n) \approx \frac{N(X,e_1,\cdots,e_n)}{N(e_1,\cdots,e_n)}$$

ただし、全ての変数集合を$\{X\} \cup E_1, \cdots, E_n \cup Y_1, \cdots, Y_m$としたとき、$N(e_1, \cdots, e_n)$は$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$となったサンプルの数であり、$N(X, e_1, \cdots, e_n)$は$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$かつ$X$となったサンプルの数である。

サンプリングはベイジアンネットの根ノードからスタートし、各ノード毎に乱数を発生させ、CPT に従って、各ノードの値を決定していく。根ノードからスタートして、子のノードの値を順に決定していくため、きちんとした順序で決定していけば親のノードが全て決定した後に子ノードの値を決定することができる。例えば、次の CPT があったとき、

B	E	$P(\neg a)$	$P(a)$
0	0	0.999	0.001
0	1	0.71	0.29
1	0	0.06	0.94
1	1	0.05	0.95

親の値が$B = 0, E = 1$、乱数をrとしたとき、$r < 0.71$ならば$A = 0$とし、$r \geq 0.71$ならば$A = 1$とすれば良い。(連続確率変数の場合は、累積分布関数の逆関数から求める)

〇尤度重み付け法

棄却サンプリングは単純明快でわかりやすい方法であるが、$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$とならなかったサンプルは計算にまったく使われないため、無駄の多いサンプリングといえる。特に$e_1, \cdots, e_n$が非常に稀な現象であるとき、$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$となるサンプルがなかなか得られない。そこで、$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$となるように強制してサンプリングする方法が望ましい。ただし、そのようにした場合は本来の分布に従ったサンプルが得られないため$E_1, \cdots, E_n = e_1, \cdots, e_n$とすることによる補正(重み付け)が必要となる。そのように重み付けを加えることを尤度重み付けという。

今、サンプルを一つ生成しようとしているとする。wを 1.0とする。棄却サンプリングと同様の方法で各ノードの値を順次決定していくが、証拠eに対応する確率変数Eのノードを決定するときは、乱数を生成せず、$E = e$とする。ただし、CPT により得られる$P(E = e|parents(E))$に対し、$w \leftarrow w \times P(E = e|parents(E))$とする。この手順を繰り返し、サンプル一つ生成したところで得られるwがそのサンプルに対する重みとなる。

棄却サンプリングではサンプル一つを 1 個と数えたが、これをw個と数えれば尤度重み付けによるサンプリングとなる。

サンプリングの手法としては、マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo: MCMC) が有名であり、その一種であるギブスサンプラー (Gibbs sampler) や、メトロポリス-ヘイスティングサンプラー (Metropolis-Hastings sampler)がよく用いられている。

知識工学問題集

問題1　　命題論理に関する次の(a)～(i)の問いに答えよ。

(a) 同値関係 $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \equiv \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$ が成り立つことを示せ。

(b) 同値関係 $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \equiv (\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)$ が成り立つことを示せ。

(c) 同値関係 $\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ が成り立つことを示せ。

(d) 同値関係 $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \neg\beta) \equiv \neg\alpha$ が成り立つことを示せ。

(e) 同値関係 $\alpha \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \delta)\big) \equiv (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \Rightarrow \delta$ が成り立つことを示せ。

(f) 伴意関係 $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \vDash \alpha \vee \beta \vee \gamma$ が成り立つことを示せ。

(g) 伴意関係 $\big(\alpha \Rightarrow (\beta \vee \gamma)\big) \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma \vDash \neg\alpha$ が成り立つことを示せ。

(h) 伴意関係 $\big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma\big) \Rightarrow \delta \vDash (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \Rightarrow \delta$ が成り立つことを示せ。

(i) 伴意関係 $\big(\alpha \Leftrightarrow (\gamma \vee \delta)\big) \wedge \big(\beta \Leftrightarrow (\gamma \vee \delta)\big) \vDash \big(\gamma \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big) \wedge \big(\delta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big)$ が成り立つことを示せ。

問題2　　2×2のワンパスワールドを命題論理で表現することを考える。$[i,j]$のマスに穴があることを命題記号$P_{i,j}$で記述し、風が吹いていることを命題記号$B_{i,j}$で記述することにする。次の(a)～(b)に答えよ。

(a) 次の知識ベースKB_1とKB_2が$KB_1 \vDash KB_2$の伴意関係にあることを示せ。

$$
\begin{aligned}
KB_1:\quad & B_{1,1} \Leftrightarrow \big(P_{2,1} \vee P_{1,2}\big)\\
& B_{1,2} \Leftrightarrow \big(P_{1,1} \vee P_{2,2}\big)\\
& B_{2,1} \Leftrightarrow \big(P_{1,1} \vee P_{2,2}\big)\\
& B_{2,2} \Leftrightarrow (P_{2,1} \vee P_{1,2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
KB_2:\quad & P_{1,1} \Rightarrow \big(B_{2,1} \wedge B_{1,2}\big)\\
& P_{1,2} \Rightarrow \big(B_{1,1} \wedge B_{2,2}\big)\\
& P_{2,1} \Rightarrow \big(B_{1,1} \wedge B_{2,2}\big)\\
& P_{2,2} \Rightarrow (B_{2,1} \wedge B_{1,2})
\end{aligned}
$$

(b) (a)で与えられたKB_1とKB_2について逆方向の伴意関係 $KB_2 \vDash KB_1$ が成り立つか成り立たないか答えよ。成り立つ場合はそれを証明し、成り立たない場合は反例を一つ示せ。

問題３　$Love(x,y)$はxがyを愛するという意味の述語とする。次の四つの論理式(a)〜(d)はそれぞれ何を意味しているか説明せよ。

(a)　$\exists x \forall y\ Love(x,y)$

(b)　$\forall y \exists x\ Love(x,y)$

(c)　$\exists y \forall x\ Love(x,y)$

(d)　$\forall x \exists y\ Love(x,y)$

問題4　次の(a)〜(d)の問いに答えよ。

(a)　伴意関係 $\forall x\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \wedge \forall x\left(Q(x) \Rightarrow R(x)\right) \vDash \forall x\left(P(x) \Rightarrow R(x)\right)$ が成り立つことを示せ。

(b)　伴意関係 $\exists x \forall y\ P(x,y) \vDash \forall y \exists x\ P(x,y)$ が成り立つことを示せ。

(c)　伴意関係 $\forall x\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right) \wedge \exists x\left(P(x) \wedge R(x)\right) \vDash \exists x\left(Q(x) \wedge R(x)\right)$ が成り立つことを示せ。

(d)　伴意関係 $\forall x\ \left(P(x) \Rightarrow \forall y\left(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)\right)\right) \wedge \exists x\ \left(P(x) \wedge \forall y\left(S(y) \Rightarrow R(x,y)\right)\right) \vDash \forall y\left(S(y) \Rightarrow \neg Q(y)\right)$ が成り立つことを示せ。

問題5　次の一階述語論理式P, Q, Rが与えられているとする。

P:　$\forall x\ [Animal(x) \Rightarrow \exists y\ HeadOf(y,x) \wedge \exists y\ BodyOf(y,x)]$

Q:　$\forall x\ [Plant(x) \Rightarrow \neg\exists y\ HeadOf(y,x)]$

R:　$\forall x\ [Plant(x) \Rightarrow \neg Animal(x)]$

次の(a)〜(b)の問いに答えよ。

(a)　$P \wedge Q \wedge \neg R$を連言標準形に(CNF)にせよ。

(b)　$P \wedge Q \vDash R$となることを示せ。

問題6　次の一階述語論理式P, Qが与えられているとする。

P:　$\forall x\ [Horse(x) \Rightarrow Animal(x)]$

Q:　$\forall x\ \left[\exists y\ \left(Horse(y) \wedge HeadOf(x,y)\right) \Rightarrow \exists y\ \left(Animal(y) \wedge HeadOf(x,y)\right)\right]$

（Pは「全ての馬は動物である」を意味し、Qは「すべての馬の頭は動物の頭である」を意味する。）

次の(a)〜(b)の問いに答えよ。

(a)　$P \wedge \neg Q$を連言標準形に(CNF)にせよ。

(b)　$P \vDash Q$となることを示せ。

問題7　次の完全結合確率分布が与えられているとする。次の(a)～(d)の確率を計算せよ。

$Toothache$(歯痛)，$Cavity$(虫歯)，$Catch$(歯医者の不快なさぐり針が痛い歯にひっかかる)という三つの論理確率変数に対する完全結合分布

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

(a) $P(toothache)$

(b) $P(Cavity)$に対する確率分布を求めよ。

(c) $P(Toothache|cavity)$に対する確率分布を求めよ。

(d) $P(Cavity|toothache \vee catch)$ に対する確率分布を求めよ。

問題 8　次の(a)～(c)について答えよ。

(a) $P(a \wedge b|c) = P(a|b \wedge c)P(b|c)$を証明せよ

(b) $P(b|a \wedge c) = \frac{P(a|b \wedge c)P(b|c)}{P(a|c)}$を証明せよ。

(c) 次の式(1)～(3)が全て同値であることを証明せよ。(式(1)～(3)がすべて同値であるとは、式(1)⇔式(2)，式(1)⇔式(3)，式(2)⇔式(3)が成り立つこと)

$P(a|b) = P(a)$　…　(1)

$P(b|a) = P(b)$　…　(2)

$P(a \wedge b) = P(a)P(b)$　…　(3)

問題9　肩こりが生じる事前確率が1/20で、髄膜炎が生じる事前確率が1/50,000とする。髄膜炎が起きたときには50%の確率で肩こりが発生することが知られているとする。肩こりが発生したとき、その原因が髄膜炎である確率を求めよ。

問題10　ある文書(例えばテキストだけ取り出したウェブページやe-メールなど)が与えられた時､それらのカテゴリ(政治、スポーツ、社会などのジャンルや、スパムと非スパムなど)を自動的に推論することは文書分類と呼ばれ、単純ベイズがよく用いられる。次の(a)〜(b)に答えよ。

(a) 文書は単語列$w_1, \cdots, w_n$からできているとする。あるカテゴリが与えられたとき各単語は独立して出現することを仮定する。カテゴリを原因($Cause$)、各単語を結果($Effect$)とみなした単純ベイズを用いて、あるカテゴリcと単語列$w_1, \cdots, w_n$に対する同時確率$P(c, w_1, \cdots, w_n)$を求めよ。カテゴリの事前確率$P(c)$と、カテゴリcから単語wが出現する確率$P(w|c)$を用いて良い。

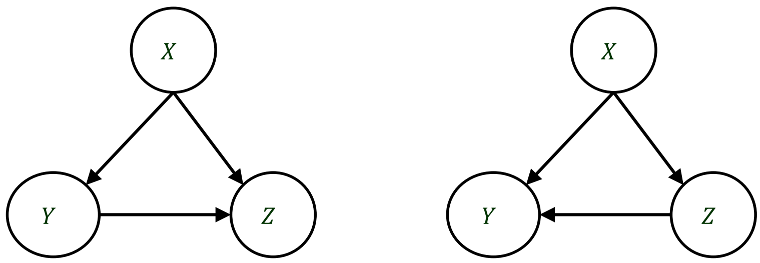
(b) カテゴリ集合をCとする。(a)で求めた式を用いると、ある文書(＝単語列$w_1, \cdots, w_n$)が与えられたときのカテゴリは次の式で推定することができる。

$$\hat{c} = \underset{c \in C}{argmax}\, P(c, w_1, \cdots, w_n)$$

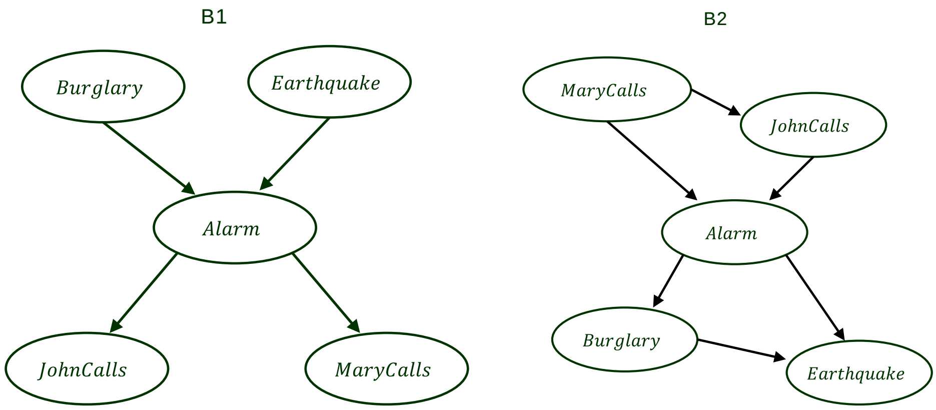
つまり、$P(c)$と$P(w|c)$が既知ならば、各カテゴリの中で$P(c, w_1, \cdots, w_n)$を最大とするカテゴリが予想されるカテゴリとなる。そこで、正解カテゴリ付の文書集合Dが与えられたとして、Dから$P(c)$と$P(w|c)$を求めることを考える。文書集合Dに含まれる文書数を$|D|$、Dに含まれる文書のうちカテゴリcである文書の数を$Count(c)$、カテゴリcに属する全文書中に単語wが出現した回数を$Count(w, c)$、語彙集合をVとしたとき、$P(c)$と$P(w|c)$を求めよ。

問題11　次の(a)〜(b)について答えよ。

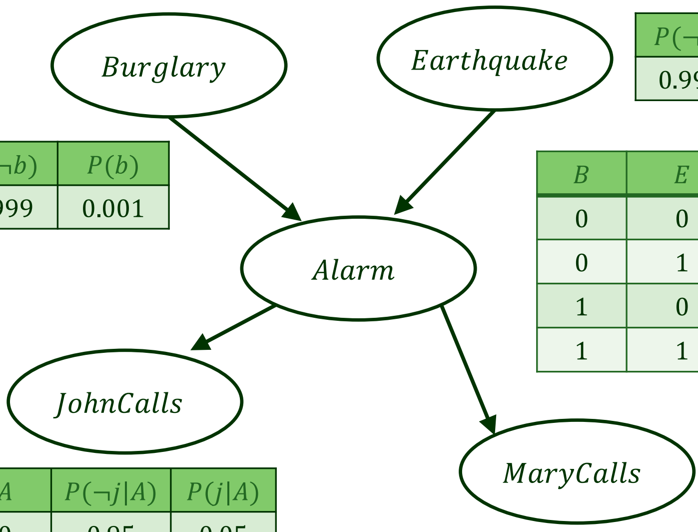
(a) 次の二つのベイジアンネットが等価であることを示せ。



(b) 次の二つのベイジアンネットB1とB2について考える。B1が与えられたとき、B1からB2が導出されることを示せ。



問題12　次の防犯アラームに関するベイジアンネットについて考える。



$P(\neg b)$	$P(b)$
0.999	0.001

$P(\neg e)$	$P(e)$
0.998	0.002

B	E	$P(\neg a \mid B,E)$	$P(a \mid B,E)$
0	0	0.999	0.001
0	1	0.71	0.29
1	0	0.06	0.94
1	1	0.05	0.95

A	$P(\neg j \mid A)$	$P(j \mid A)$
0	0.95	0.05
1	0.10	0.90

A	$P(\neg m \mid A)$	$P(m \mid A)$
0	0.99	0.01
1	0.30	0.70

$Burglary, Earthquake, Alarm, JohnCalls, MaryCalls$は論理確率変数で、それぞれ$B, E, A, J, M$と略記することにする。また、各論理確率変数に対し、$X = 1$はx、$X = 0$は$\neg x$と表記することにする。次の(a)〜(c)の問いに答えよ。

(a) $P(B, E, A, j, m)$を求めよ。(B, E, Aに対する確率分布の表を作成すればよい)

(b) (a)の結果を用いて、$P(B \mid j, m)$を求めよ。(Bに対する確率分布の表を作成すればよい)

(c) AlarmのCPTをNoisy-ORで表現することを考える。AlarmのCPTに関して次の式だけが与えられたとする。

$$P(\neg a \mid \neg b, e) = 0.71$$
$$P(\neg a \mid b, \neg e) = 0.06$$

このとき、次の表を埋めて、Noisy-ORで表現したAlarmのCPTを完成させよ。

B	E	$P(\neg a \mid B,E)$	$P(a \mid B,E)$
0	0		
0	1	0.71	
1	0	0.06	
1	1		