知識工学　第6回

二宮　崇

教科書と資料

- 教科書
  - Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

- この講義のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

本日の講義内容

- 一階述語論理(§8.2)
  - モデル
  - 記号と解釈
  - 統語論
    - 項, 原子文, 複合文
    - 限量子
      - 全称限量子
      - 存在限量子
    - 等号

一階述語論理(§8.2)

- 命題論理の限界

例1 (三段論法)

すべての人間は死ぬ。

ソクラテスは人間である。

∴ソクラテスは死ぬ

一階述語論理(§8.2)

- 命題論理の限界

例2

モーツァルトは天才である。

ベートーベンは天才である。

これら二つの命題を単に命題記号PやQとするだけでは、「～は天才である」といった共通の関係を見いだすことができない

一階述語論理(§8.2)

- 命題論理の限界

例3

ジョンはヨーコを愛している。

この文を命題記号Pとすると、「～が～を愛している」という関係を記述できない

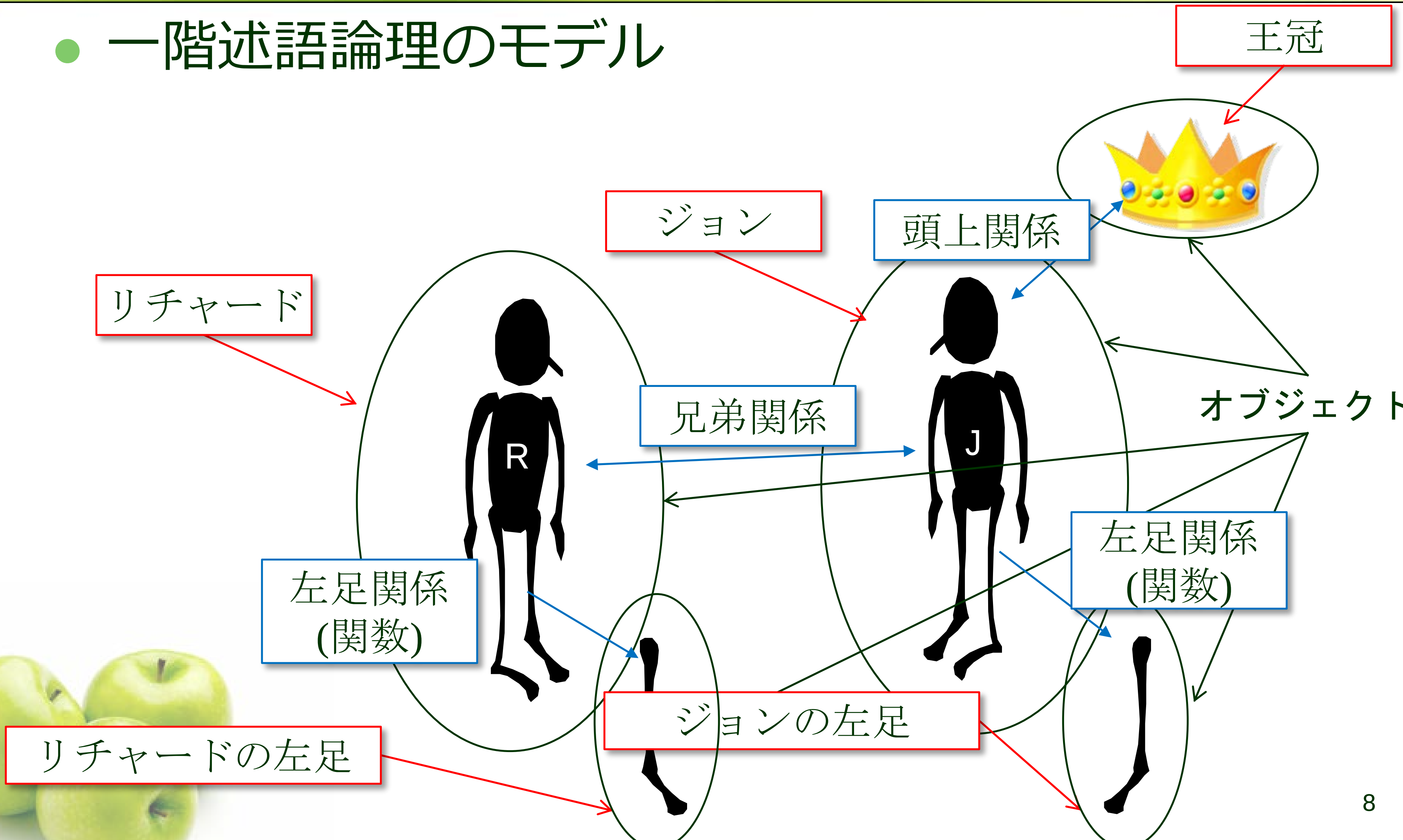
一階述語論理におけるモデル(§8.2.1) (一階述語論理の意味論)

- 命題論理のモデル
  - 命題記号に対する真理値の割り当て

- 一階述語論理のモデル
  - オブジェクトの集合から成る。このオブジェクトの集合は領域(domain)と呼ばれる。
  - オブジェクトおよびオブジェクト間には関係が定義されている。関係はn項組で定義される。

一階述語論理におけるモデル(§8.2.1)(一階述語論理の意味論)

- 一階述語論理のモデル



記号と解釈(§8.2.2)

- 一階述語論理の基本的な記号
  - 定数記号: オブジェクトを表現する。$Richard$や$John$や$Crown$など。
  - 述語記号: 関係を表現する。$Brother$や$OnHead$など。
  - 関数記号: 関数を表現する。$LeftLeg$など。

記号と解釈(§8.2.2)

- 解釈
  - 定数記号とオブジェクトの対応
  - 述語記号と関係の対応
  - 関数記号と関数の対応

解釈

モデル(オブジェクトと関係)	記号
リチャード	$Richard$
ジョン	$John$
リチャードの左足	$LeftLeg(Richard)$
ジョンの左足	$LeftLeg(John)$
王冠	$Crown$
兄弟関係	$Brother$
頭上関係	$OnHead$
左足関係	$LeftLeg$

記号と解釈(§8.2.2)

- 命題論理
  - モデル(命題記号の真理値)が決まれば論理式の真偽が決まる
  - 全ての可能なモデルを調べれば、伴意関係、妥当性を判定できる→推論
- 一階述語論理
  - 解釈とモデルが与えられれば論理式の真偽が決まる
  - 全ての可能な解釈と全ての可能なモデルから伴意関係、妥当性を定義→推論
  - モデルの中には無限のオブジェクト(自然数など)が存在しうるため、可能なモデルの列挙はできない

項(§8.2.3)

- 関数と定数と変数の組合せを項(term)と呼ぶ。
- 定数も項である。
- 項も定数同様何らかのオブジェクトを指す。

例: 関数と定数を組み合わせた$LeftLeg(John)$は項である。

関数は「項」を受け取って「項」を返す

述語は「項」を受け取って「ブール値(真/偽)」を返す

原子文(§8.2.4)

- 述語記号に括弧をつけて、項をその中に並べた論理式を原子文(atomic sentence)と呼ぶ。

原子文の例

$$Brother(Richard, John)$$
$$Married(Father(Richard), Mother(John))$$

$Brother, Married$は述語記号

$Father, Mother$は関数記号

$Richard, John, Father(Richard), Mother(John)$は項

複合文(§8.2.5)

- 命題論理の場合と同様、論理結合子($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)を用いて原子文をつないだ論理式を複合文(complex sentence)と呼ぶ。

複合文の例

$$\neg Brother(LeftLeg(Richard), John)$$
$$Brother(Richard, John) \wedge Brother(John, Richard)$$
$$King(Richard) \vee King(John)$$
$$\neg King(Richard) \Rightarrow King(John)$$

このニつは非常に似ているが異なるものなので注意！

- 関数と定数を組み合わせた項
- 述語と項を組み合わせた原子文

限量子(§8.2.6)

- オブジェクトの集合に対する性質や関係をまとめて定義するための記号を限量子(quantifier)と呼ぶ。
- 定数記号や関数記号を用いて列挙するのではなく、限量子と変数でまとめて関係や性質を定義することができる。
- 全称限量子(∀)、存在限量子(∃)などがある

限量子(§8.2.6)

- 全称限量子(∀, universal quantifier)
  - 「全ての…」と読む。
  - $\forall x\ P$というふうに用いて、全てのオブジェクトxに対し、Pの論理式が真であるとき、$\forall x\ P$は真となる。

例

$$\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)$$

xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうる。この各オブジェクトxに対し、$King(x) \Rightarrow Person(x)$が真となるならば、$\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)$は真となる。

限量子(§8.2.6)

- 存在限量子(∃, existential quantifier)
  - 「ある…」と読む。
  - $\exists x\ P$というふうに用いて、少なくともある一つ以上のオブジェクトxに対し、Pの論理式が真となるとき、$\exists x\ P$は真となる。

例

$$\exists x\ Crown(x) \land OnHead(x, John)$$

xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうるが、xが「王冠」を参照したとき、$Crown(x) \land OnHead(x, John)$は真となるため、$\exists x\ Crown(x) \land OnHead(x, John)$は真となる。

限量子(§8.2.6)

[問題] 次の論理式はどちらも使い方として誤っている。何故か？

$$\forall x\ King(x) \land Person(x)$$

$$\exists x\ Crown(x) \Rightarrow OnHead(x, John)$$

限量子(§8.2.6)

- 入れ子の限量子
  - 限量子を並べて用いることで複雑な論理式を表現

「兄弟は兄弟姉妹である」

$$\forall x \forall y\ Brother(x,y) \Rightarrow Sibling(x,y)$$

「兄弟姉妹関係は対称である」

$$\forall x \forall y\ Sibling(x,y) \Rightarrow Sibling(y,x)$$

- 同じ種類の限量子が続く場合は次のように省略して記述することもできる。

例

$$\forall x,y\ Brother(x,y) \Rightarrow Sibling(x,y)$$

限量子(§8.2.6)

- 入れ子の限量子
  - 同じ種類の限量子はその順番を入れ替えても意味は変わらない。

$$\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$$
$$\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$$

  - 異なる種類の限量子はその順番を変えると意味が異なるので注意

$$\forall x \exists y\ Loves(x,y)$$
$$\exists y \forall x\ Loves(x,y)$$

限量子(§8.2.6)

- ∀と∃の関係
  - 否定を通して∀と∃には密接な関連がある。

$$\neg\exists x\ P \ \equiv\ \forall x \neg\ P$$

$$\neg\forall x\ P \ \equiv\ \exists x \neg\ P$$

  - 否定(¬)を限量子の内側に入れることができ(外側に出すことができ)、そのときに全称限量は存在限定に、存在限定は全称限定に入れ替わる

例「誰もがパースニップを嫌う」は「パースニップを好きな人がいない」と等価である。

$$\forall x\ \neg\ Like(x, Parsnips) \equiv \neg\exists x\ Like(x, Parsnips)$$

限量子(§8.2.6)

- ∀と∃の関係

$$\forall x\ P \ \equiv\ \neg\exists x \neg\ P$$
$$\exists x\ P \ \equiv\ \neg\forall x \neg\ P$$

  - 全称限量子と存在限量子を入れ替えることが可能!

例

「誰もがアイスクリームを好む」は「アイスクリームが嫌いな人はいない」と等価である。

$$\forall x\ \ Like(x, IceCream) \equiv \neg\exists x \neg\ Like(x, IceCream)$$

限量子(§8.2.6)

- 限量子の範囲の拡大と縮小

$$R \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$
$$R \vee \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$
$$R \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \wedge Q(x)\big)$$
$$R \vee \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(R \vee Q(x)\big)$$

ただし、Rは変数xを含まない論理式

(左辺から右辺) 限量子の範囲を自由に広げることができる
(限量子を外側に追いやることができる)

(右辺から左辺) 限量子の変数が含まれない述語は無視して、
その限量子の範囲を縮小できる

限量子(§8.2.6)

- 限量子の統合と分解

$$\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, \big(P(x) \land Q(x)\big)$$
$$\exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, \big(P(x) \lor Q(x)\big)$$

(左辺から右辺) $\forall x\, P(x)$と$\forall x\, Q(x)$がそれぞれ成り立っていれば、$\forall x\, \big(P(x) \land Q(x)\big)$として、一つの全称限量子にまとめることができる

(右辺から左辺) $\forall x\, \big(P(x) \land Q(x)\big)$という形の式であっても、ばらばらに$\forall x\, P(x)$と$\forall x\, Q(x)$として用いてかまわない、ということ。

等号関係(§8.2.7)

- 等号(=)
  - 二つの項が同じオブジェクトを参照する、という意味

例

$$Father(John) = Henry$$

- $Father(John)$が参照するオブジェクトと$Henry$が参照するオブジェクトが同じもの
- この原子文はある解釈が与えられたとき、その解釈において$Father(John)$と$Henry$が同じオブジェクトを参照しているときに真となる。

等号関係(§8.2.7)

- 等号と否定を組み合わせて、二つの項が同一のオブジェクトではないことを記述することもできる。

例：「リチャードには少なくとも二人の兄弟がいる」

$$\exists x, y\ Brother(x, Richard) \land Brother(y, Richard) \land \neg(x = y)$$

$\neg(x = y)$は$x \neq y$と省略表記されることが多い。

等号関係(§8.2.7)

[問題] $\exists x, y\ Brother(x, Richard) \land Brother(y, Richard)$だけだと「少なくとも二人に兄弟がいる」ことにはならない。何故か？

一階述語論理の統語論 (§8.2)

- バッカス・ナウア記法による一階述語論理の統語論

文→原子文 | (文 結合子 文) | 限量子 変数, … 文 | ¬文

原子文→述語(項, …) | 項 = 項

項→関数(項, …) | 定数 | 変数

結合子→⇒ | ∧ | ∨ | ⇔

限量子→∀ | ∃

定数→A | X_1 | $John$ | …

変数→a | x | s | …

述語→$Before$ | $HasColor$ | $Raining$ | …

関数→$Mother$ | $LeftLeg$ | …