知識工学　第4回

二宮　崇

教科書と資料

- 教科書
  - Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

- この講義のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

前回までの復習(1)

- 論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$)
  - 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。
  - $\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

- 伴意関係($\alpha \vDash \beta$)
  - $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。
  - $\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることは等しい。
  - $\alpha \vDash \beta$ かつ $\beta \vDash \alpha$ であることと$\alpha \equiv \beta$であることは等価。論理的同値関係は伴意関係でもある。
  - $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、KBにαを追加してよい
  - 縮小律 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i$が成り立つ。$KB$の任意の知識$\alpha_i$に対し、$KB \vDash \alpha_i$。

前回までの復習(2)

- 推論
  - $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定するため知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

- モデル検査
  - $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定するため、KBとαの真理値表をつくって判定する方法
  - KBが$true$となるすべてのモデルに対し、αも$true$となっていれば$KB \vDash \alpha$が成り立つ
  - 推論の一種。

- 背理法: 論理式$\alpha \land \neg\beta$が充足不能であることと$\alpha \vDash \beta$であることは等価。

前回までの復習(3)
論理的同値関係

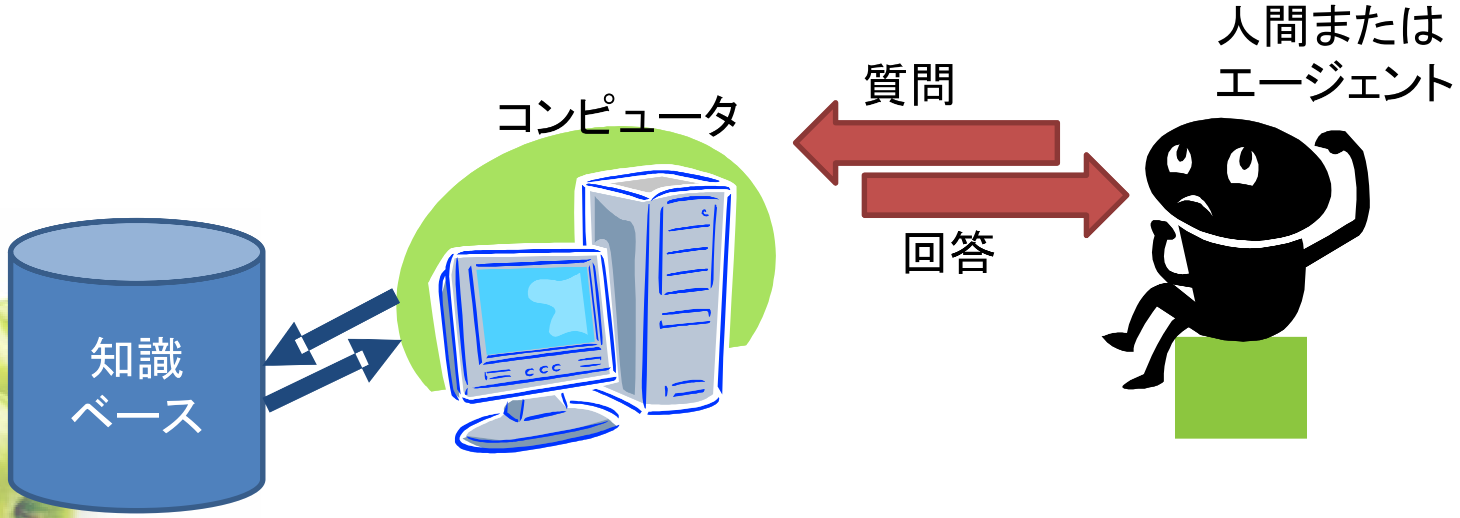
α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	ベキ等律
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	ベキ等律
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	交換律
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	交換律
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	結合律
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	結合律
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	復元律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	対偶律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	含意
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	双条件
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	ド・モルガン
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	ド・モルガン
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	吸収律
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	吸収律

前回までの復習(4)
伴意関係

$\alpha \land \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And除去)
$\alpha \land \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And除去)
α	$\vDash$	$\alpha \lor \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \lor \beta$	拡大律
$\alpha \land (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \land \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \land (\alpha \lor \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \lor \beta) \land (\neg\alpha \lor \gamma)$	$\vDash$	$\beta \lor \gamma$	融合規則

命題論理における推論パターン(§7.5)
推論の問題設定

- 知識ベース(KB)
  - 知識(論理式)の集合
  - $KB = R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n$
- 質問(Q)
  - 知識ベースが与えられたときにそれに対する質問を投げる
- 質問に対するyes/noを知りたい



命題論理における推論パターン(§7.5)
推論の問題設定

- 知識ベース(KB)が与えられたとき、ある質問(Q)がKBにおいて成り立つかどうか？
  - 伴意関係が成り立つかどうかを判定することによって実現される
  - $KB \vDash Q$が成り立つかどうか？

命題論理における推論パターン(§7.5)
推論

- 推論 $KB \vdash \alpha$
  - 知識ベースKB
  - 論理式α
  - $KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べることを推論(inference)と呼ぶ
  - KBからαが導出される推論を$KB \vdash \alpha$と表現する(関係ではなく操作)。
  - 推論にはいろんな方法がある
    - モデル検査
    - 論理的同値関係や伴意関係により式を展開

命題論理における推論パターン(§7.5) モデル検査による推論

- モデル検査による推論
  - モデルの全列挙
  - 非効率
- もっと効率の良い推論方法を考えよう
  - ただし、命題論理における推論はNP完全であることがわかっているため、どんなに頑張っても最悪計算量は指数オーダー

命題論理における推論パターン(§7.5)
健全性と完全性

- 伴意関係が成り立つかどうかを調べるための推論アルゴリズムが多く提案されている

- 健全性
  - 推論できた場合には必ず伴意関係にあることが保証されている推論アルゴリズムは「健全(sound)である」と言われる
  - $KB \vdash \alpha$なら$KB \vDash \alpha$であるとき健全

- 完全性
  - 伴意関係にある論理式を必ず推論できる推論アルゴリズムは「完全(complete)である」と言われる
  - $KB \vDash \alpha$なら$KB \vdash \alpha$であるとき完全

命題論理における推論パターン(§7.5) 健全性と完全性

- 完全性を満たすのは難しいが、幸いなことに論理における完全な推論手続きが存在する。
- モデル検査は任意のKBとαに対して有限時間で終了するため、健全かつ完全な推論方法

命題論理における推論パターン(§7.5)
準備

- 知識ベース
  - $KB = R_1 \land \cdots \land R_n$
  - $KB = \{R_1, \cdots, R_n\}$ とも表現する
  - 各R_iが知識

- 推論の戦略
  - 知識ベースに対する論理的同値関係を保持したまま、新しい知識Rを増やす
  - $KB \vDash R$となるRを導出
    - 知識ベース中の知識PとQから新しい知識Rが得られる

$P, Q \vdash R$　　もしくは　　$\dfrac{P \quad\quad Q}{R}$　　と書く

  - 最終的に質問αが導出されれば$KB \vDash \alpha$

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その1

- 戦略
  1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。この操作(推論)を$KB \vdash R$と書くことにする。
  2. $KB \vdash \alpha$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。
  3. 1.に戻る。

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その1

- $KB \vdash R$となるRをどうやって発見(導出)するか？
  - 伴意関係によりRを導出
    - 論理的同値関係以外のふつうの伴意関係
      - 対称ではない(片方向にしか成り立たない)
    - 論理的同値関係
      - 伴意関係の一種
      - 伴意関係が双方向に成り立つ

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その1

- 伴意関係による推論規則($KB \vdash R$)
  - $KB \vDash R$ は $KB \equiv KB \land R$
  - Rを新しい知識としてKBに追加

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その1

- 伴意関係による推論規則の例
  - モーダスポーネンス (Modus Ponens, 三段論法)

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

  - 縮小律(And除去, And-Elimination)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

  - 逆方向に推論することができない点に注意

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その1

- 論理的同値関係による推論規則($KB \vdash R$)
  - 論理的同値関係は双方向に成り立つ伴意関係
  - 知識ベースの要素R_iの同値関係(R)を知識ベースに追加してよい

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その1

- 論理的同値関係による推論規則の例
  - 双条件除去 (biocnditional elimination)

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)} \qquad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その1

- 証明の書き方
  - 証明をする際に論理的同値関係≡で式をつないでいると同じ論理式を何度も書かなければならなくなってしまって煩雑である。

そこで、

- 知識ベースの各知識にIDをつける
- 新しく追加される知識にも新しいIDをつける
- IDを使って推論過程を表現

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その1

- ワンパスワールドの例
- R_1:　$\neg P_{1,1}$
- R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$
- R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow \left(P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}\right)$
- R_4:　$\neg B_{1,1}$
- R_5:　$B_{2,1}$
- Q: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その1

R$_2$に双条件除去を適用

- R$_6$:　$\left(B_{1,1} \Rightarrow \left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)\right) \wedge \left(\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}\right)$

R$_6$にAnd除去を適用

- R$_7$:　$\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}$

R$_7$の対偶

- R$_8$:　$\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right)$

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その1

R_8とR_4に対し、モーダスポーネンスを適用

- R_9:　$\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_9に対しド・モルガンの法則を適用

- R_{10}:　$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

- 従って[1,2]と[2,1]に穴がないことがわかる

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その2 (背理法)

- 背理法による推論の戦略
  - $KB \land \neg\alpha$に対して推論を行い、新しい知識Rを増やす
  - $KB \land \neg\alpha \equiv KB \land \neg\alpha \land R$となる$R$を導出
  - 最終的に偽$(= 0)$が導出されたら
    - $KB \land \neg\alpha \equiv KB \land \neg\alpha \land \cdots \land 0$となり$KB \land \neg\alpha$は常に偽となる(充足不能)
    - 背理法より$KB \vDash \alpha$が証明できたことになる。

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その2 (背理法)

- 背理法による推論の戦略

1. $KB' = KB \wedge \neg\alpha$とする。
2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。
3. $KB' \vdash 0$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。
4. 2.に戻る。

命題論理における推論パターン(§7.5)
証明の戦略その2(背理法)

- ワンパスワールドの例
- R_1:　$\neg P_{1,1}$
- R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
- R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$
- R_4:　$\neg B_{1,1}$
- R_5:　$B_{2,1}$

ここで質問を $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$ とし、その否定を知識ベースに追加し、矛盾($false$)を導出することを目指す。

- R_6:　$\neg(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1})$

命題論理における推論パターン(§7.5) 証明の戦略その2(背理法)

R_6 に対しド・モルガンと復元律を適用

- R_7:　$P_{1,2} \vee P_{2,1}$

R_2 に双条件除去とAnd除去を適用

- R_8:　$\left(P_{1,2} \vee P_{2,1}\right) \Rightarrow B_{1,1}$

R_7 と R_8 に対し、モーダスポーネンスを適用

- R_9:　$B_{1,1}$

R_4 と R_9 より、 0が導出されるため、充足不能であることが示せた。よって、 $KB \vDash \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$が成り立つ。