知識工学（第３回）

二宮 崇（ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp）

論理的エージェント(7 章のつづき)

〇前回までの復習

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

推論: $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

〇伴意関係の性質①「$\alpha \vDash \beta$が成り立つことは$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることと等しい」

天下り的に伴意関係$KB \vDash \alpha$は「$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることに等しい」としたが、これはどうして成り立つのだろうか？$KB \vDash \alpha$は$KB \equiv KB \wedge \alpha$のことだから、この論理的同値関係がどういう時に成り立つかどうか真理値表で確かめてみよう。

KB	α	$KB \wedge \alpha$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つのは、$KB = 0, \alpha = 0$のときと、$KB = 0, \alpha = 1$のときと、$KB = 1, \alpha = 1$のときだけである。このとき、いずれの場合も$KB \Rightarrow \alpha$は真となる。従って、$KB \vDash \alpha$が満たされるときは、

$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなる。逆に、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーであるときは、どのモデルにおいても、$KB = 0, \alpha = 0$となるか、$KB = 0, \alpha = 1$となるか、$KB = 1, \alpha = 1$となるかのいずれかである。このいずれの場合でも、$KB \equiv KB \land \alpha$は成り立つ。従って、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなるときは、$KB \vDash \alpha$が成り立つ。よって、$KB \vDash \alpha$が成り立つことと、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることは等しい。

〇モデル検査による推論

　伴意関係$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べようと思ったら、KBとαの真理値表を作って、その真理値表において$KB \equiv KB \land \alpha$が成り立つかどうか調べれば良い。そして、この関係は$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーであれば満たされる、ということであったので、KBが真のとき、αも真になっているかどうか調べればよい、ということになる(KBが偽のときは、常に$KB \Rightarrow \alpha$が真となるので、調べなくても良いということである)。この推論の方法のことは「モデル検査」と呼ばれる。モデル検査は任意のKBとαに対して有限時間でその判定を終了することができるため、非常に優れた推論方法と言える。しかし、モデル検査はモデルの数が少ない場合においては有効であるが、モデルを決定する変数の数に対し指数オーダーでモデルの数が増加してしまう問題がある。そのため、伴意関係が成り立つかどうかを調べるための推論アルゴリズムが多く提案されている。

モデル検査の例: $(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

前提部分が真$(= 1)$のところだけみて、結論部分が真$(= 1)$になっているかどうか調べれば良い。これによって$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$が示せたことになる。また、このことは、次の論理的同値関係が示せたということでもある。

$$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \land (P \Rightarrow R)$$

みてわかるように前提から$(P \Rightarrow R)$という知識が新しく得られたことがわかる。

ワンパス・ワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

R_5:　$\neg B_{1,1}$

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	KB
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

$B_{1,1}, B_{2,1}, P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$の 7 つの命題記号だけ考えるとこのような真理値表となり、$2^7 = 128$個の可能なモデルが存在する。このうち 3 つのモデルについてはKBが真となる。今知りたいことは穴があるかどうか、ということなので、$P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$についてそれぞれ$KB \vDash P_{i,j}$か$KB \vDash \neg P_{i,j}$が成り立つかどうか、判定すればよい。真理値表より$KB \vDash \neg P_{1,1}$と$KB \vDash \neg P_{1,2}$と$KB \vDash \neg P_{1,2}$が成り立つ。

○伴意関係の性質②「論理的同値関係は伴意関係」

(1) $\alpha \equiv \beta$が成り立つとき、$\alpha \vDash \beta$が成り立つ ($\beta \vDash \alpha$ も成り立つ)。つまり、論理的同値関係は伴意関係の一種である。

(2) $\alpha \vDash \beta$ と $\beta \vDash \alpha$ が成り立つとき、またそのときにかぎり$\alpha \equiv \beta$が成り立つ。

つまり、吸収律やド・モルガン律など、論理的同値関係を満たす全ての性質(ブール関数の性質など)を伴意関係として推論に使える、ということである。

伴意関係と論理的同値関係の関係については、数式における不等号と等号の関係に似ていると考えるとわかりやすいかもしれない。

$$\alpha \vDash \beta \quad \leftrightarrow \quad x \geq y$$

$$\alpha \equiv \beta \quad \leftrightarrow \quad x = y$$

$$\alpha \vDash \beta \text{かつ} \beta \vDash \alpha \text{ならば} \alpha \equiv \beta \quad \leftrightarrow \quad x \geq y \text{かつ} y \geq x \text{ならば} x = y$$

※伴意関係$\alpha \vDash \beta$においてαとβのどちらが大きいと考えればいいのか、ということについては、一概には言えず、難しい。情報量という観点からいうと$\alpha \geq \beta$となるし、モデルの包含関係からいうと、$\beta \geq \alpha$となる。情報量という観点から$\alpha \vDash \beta$は$\alpha \geq \beta$に対応すると考えるのがわかりやすいと思われる。

〇伴意関係の性質③「知識ベースの更新」

$\alpha \vDash \beta$が成り立つならば、伴意関係の定義より、$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つ。知識ベースを$KB$に対して、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、$KB \equiv KB \wedge \alpha$となる。つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、知識ベース$KB$に$\alpha$を追加してよい。

〇伴意関係の性質④「知識ベースから知識を取り出す」

次の性質は「縮小律(And 除去)」と呼ばれる伴意関係である。

$$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \vDash \beta$$

縮小律を用いると知識ベースの中の任意の知識を推論結果として取り出すことができる。縮小律については、次の真理値表よりその関係が成り立つことがわかる。

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

縮小律はより一般に次の形になる。

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i \ (1 \leq i \leq n)$$

そのため、知識ベースを$KB = R_1 \land \cdots \land R_n$としたとき、任意の知識$R_i$に対し、$KB \vDash R_i$となる。つまり、知識ベースの中の任意の知識を推論の結果として良い、ということである。また、知識ベースの中のある知識Rが$R = \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n$という形をしていたとき、$KB \vDash \alpha_i$となる。

知識ベースの更新と知識ベースからの知識の抽出をうまく組み合わせればモデル検査とは異なる推論ができそうである。$KB = \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n$であるとき、伴意関係より、$KB \equiv \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n \land \beta_1 \land \cdots \land \beta_m$ということが示せたのなら、任意の$\beta_i$に対し$KB \vDash \beta_i$となる。

〇伴意関係の例

$\alpha \land \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And 除去)
$\alpha \land \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And 除去)
α	$\vDash$	$\alpha \lor \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \lor \beta$	拡大律
$\alpha \land (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \land \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \land (\alpha \lor \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \lor \beta) \land (\neg\alpha \lor \gamma)$	$\vDash$	$\beta \lor \gamma$	融合規則

これらが成り立つことは真理値を調べることによって成り立つことがわかる。ただし、伴意関係は論理的同値関係とは異なり逆方向に成り立つとは限らないことに注意。この中で特に縮小律、モーダスポーネンス、融合規則は重要である。

〇妥当性、充足可能性、背理法

妥当性 (validity): ある論理式がすべてのモデルにおいて真であるとき、その論理式は妥当である、という。妥当な論理式はトートロジー(恒真式)と呼ばれる。

充足可能性 (satisfiability): ある論理式が何らかのモデルで真となるとき、その論理式は充足可能である、という。$KB = R_1 \land R_2 \land R_3 \land R_4 \land R_5$の例では 3 つのモデルで真となるため充足可能である。論理式αがmで真である場合、mはαを充足する(satisfy)、もしくは、mはαのモデルである、という。

背理法: 論理式$\alpha \land \neg\beta$が充足不能であるとき、またそのときに限り$\alpha \vDash \beta$である。反駁による証明、矛盾による証明とも言われる。

充足不能とは、どのモデルにおいても偽となることである。すなわち、αが妥当(トートロジー)であることと、$\neg\alpha$が充足不能であることは等しい。従って、$\neg(\alpha \land \neg\beta) \equiv \neg\alpha \lor \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$であるから、背理法はまさに$\alpha \Rightarrow \beta$が妥当であることを調べていることになっている。

背理法によるメリットは二つある。一つは、αとβにわかれていた二つの論理式が一つの論理式になることである。αの中の部分論理式とβの中の部分論理式を組み合わせて推論できるようになる。もう一つは、論理式が妥当であることを示すのではなく、論理式が充足不能であることを示せばよい点である。論理式が妥当であることを直接示すには論理式全体が恒真であることを示さねばならず、式の置き換えで論理式全体が恒真となるように導くのは容易ではない。一方、充足不能であることを示すためには、追加される知識のうちのただ一つが偽になることを示せば良いだけである。

第 3 回までのまとめ

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

重要な論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。

1. $\alpha \vDash \beta$が成り立つということと$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることは等しい。
2. 論理的同値関係は伴意関係でもある。$\alpha \vDash \beta$ かつ $\beta \vDash \alpha$ であることと$\alpha \equiv \beta$であることは等価。
3. $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、KBにαを追加してよい
4. 縮小律 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i$が成り立つ。$KB$の任意の知識$\alpha_i$に対し、$KB \vDash \alpha_i$。

重要な伴意関係の例

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And 除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And 除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

推論: $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

モデル検査: $KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べるため、KBとαの真理値表をつくって確認する方法。$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーになっているかどうか確認すればよい。推論の一種。

背理法: 論理式$\alpha \wedge \neg\beta$が充足不能であることと$\alpha \vDash \beta$であることは等価。