知識工学　第3回

二宮　崇

教科書と資料

- 教科書
  - Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

- この講義のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

命題論理(§7.4)
前回までの復習

- 論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$)

  真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

- 伴意関係($\alpha \vDash \beta$)

  $\alpha \equiv \alpha \land \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

- 推論

  $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

命題論理(§7.4) 伴意関係の性質①

「$\alpha \vDash \beta$が成り立つことは$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることと等しい」

- $KB \vDash \alpha$ $(KB \equiv KB \wedge \alpha)$の真理値表をつくってどういう時に伴意関係が成り立つかみてみよう

命題論理(§7.4)
伴意関係の性質①

- $KB \vDash \alpha \; (KB \equiv KB \wedge \alpha)$の真理値表

KB	α	$KB \wedge \alpha$	
0	0	0	$KB \vDash \alpha$が成り立つ
0	1	0	$KB \vDash \alpha$が成り立つ
1	0	0	
1	1	1	$KB \vDash \alpha$が成り立つ

$KB \vDash \alpha \; (KB \equiv KB \wedge \alpha)$が成り立つのは、$KB = 0, \alpha = 0$のときと、$KB = 0, \alpha = 1$のときと、$KB = 1, \alpha = 1$のときだけ。

このとき、いずれの場合も$KB \Rightarrow \alpha$は真となる。従って、$KB \vDash \alpha$が満たされるときは、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなる。

命題論理(§7.4)
伴意関係の性質①

逆に、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーであるときは、どのモデルにおいても、$KB = 0, \alpha = 0$ となるか、$KB = 0, \alpha = 1$ となるか、$KB = 1, \alpha = 1$となるかのいずれかである。

このいずれの場合でも、$KB \equiv KB \land \alpha$は成り立つ。

従って、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなるときは、$KB \vDash \alpha$が成り立つ。

よって、$KB \vDash \alpha$が成り立つことと、$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることは等しい。

命題論理(§7.4)
モデル検査による推論

- モデル検査
  - $KB \vDash \alpha$は$KB \equiv KB \land \alpha$のことである
  - $KB \equiv KB \land \alpha$が成り立っているかどうか真理値表で直接確かめればよい
  - 真理値表で直接確かめる方法のことをモデル検査、という

命題論理(§7.4)
モデル検査による推論

- モデル検査
  - $KB \equiv KB \land \alpha$が成り立っているかどうか真理値表で直接確かめればよい

しかし、「$KB \vDash \alpha$が成り立つことは$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなることと等しい」となっているわけだから、、、

  - $KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーとなっていることを確かめればよい

そして、それは、KBが真となる全てのモデルにおいて、αが真となっているかどうか確かめることと等しい
(KBが偽のときは、常に$KB \Rightarrow \alpha$が真となるので、調べなくても良いということ)

命題論理(§7.4)
モデル検査による推論

- モデル検査の手順
  - KBとαの真理値表を作る
  - KBが真のモデルに対し、αも真になっているか調べる

- 任意のKBとαに対して有限時間でその判定を終了可能 (どんな推論も有限時間でできる、ということ!)

- モデル検査はモデルの数が少ない場合においては有効であるが、モデルを決定する変数の数に対し指数オーダーでモデルの数が増加する。

命題論理 (§7.4)
モデル検査による推論

- 推論の例
  - $(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow R$ が成り立つか？

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

- 前提部分が真($= 1$)の行だけ調べれば良い

命題論理 (§7.4)
モデル検査による推論

- ワンパス・ワールドの例
  - $B_{1,1}, B_{2,1}, P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}, P_{2,2}, P_{3,1}$の7つの命題記号に対する真理値表 ($2^7 = 128$のモデル)
  - 穴があるかどうか？($KB \vDash \neg P_{i,j}$が成り立つかどうか？)

$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	KB
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質②

「論理的同値関係は伴意関係」

- $\alpha \equiv \beta$が成り立つとき、$\alpha \vDash \beta$が成り立つ。つまり、論理的同値関係は伴意関係の一種である。

  つまり、吸収律やド・モルガン律など、論理的同値関係を満たす全ての性質(ブール関数の性質など)を伴意関係として推論に使える

- $\alpha \vDash \beta$ と $\beta \vDash \alpha$ が成り立つとき、またそのときにかぎり$\alpha \equiv \beta$が成り立つ。

  つまり、伴意関係が双方向に成り立つとき、それは論理的同値関係となる

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質②

- 伴意関係と論理的同値関係の関係は、数式における不等号と等号の関係に似ている

$$\alpha \vDash \beta \qquad \leftrightarrow \qquad x \geq y$$

$$\alpha \equiv \beta \qquad \leftrightarrow \qquad x = y$$

$$\alpha \vDash \beta \text{かつ} \beta \vDash \alpha \text{ならば} \alpha \equiv \beta \qquad \leftrightarrow \qquad x \geq y \text{かつ} y \geq x \text{ならば} x = y$$

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質③

「知識ベースの更新」

- $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、知識ベースKBにαを追加してよい

伴意関係の定義より、$\alpha \equiv \alpha \land \beta$が成り立つ。知識ベースを$KB$に対して、$KB \vDash \alpha$が成り立つならば、$KB \equiv KB \land \alpha$となる

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質④

「知識ベースから知識を取り出す」

- 縮小律を用いると知識ベースの中の任意の知識を推論結果として取り出すことができる

- 縮小律(And除去)

$$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$$
$$\alpha \wedge \beta \vDash \beta$$

- 縮小律の一般形

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vDash \alpha_i \ (1 \leq i \leq n)$$

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質④

- 縮小律の真理値表

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- よって$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$が成り立つ

命題論理 (§7.4)
伴意関係の性質④

知識ベースを$KB = R_1 \land \cdots \land R_n$とする。

- このとき、任意の知識R_iに対し、$KB \vDash R_i$
  - 知識ベースの中の任意の知識を推論の結果として良い、ということ
- ある知識Rが$R = \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n$という形をしていたとき、$KB \vDash \alpha_i$
- モデル検査ではない新しい推論？
  - 知識ベースの更新と知識ベースからの知識の抽出をうまく組み合わせればモデル検査とは異なる推論ができそう？
  - $KB = \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n$であるとき、伴意関係より、$KB \equiv \alpha_1 \land \cdots \land \alpha_n \land \beta_1 \land \cdots \land \beta_m$ということが示せたのなら、任意の$\beta_i$に対し$KB \vDash \beta_i$となる。

命題論理 (§7.4) 伴意関係の例

- 伴意関係の例

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

- これらが成り立つことは真理値を調べることによって成り立つことがわかる
- ただし、伴意関係は論理的同値関係とは異なり逆方向に成り立つとは限らないことに注意
- 特に縮小律、モーダスポーネンス、融合規則は重要

命題論理 (§7.4)
妥当性、充足可能性、背理法

- 妥当性 (validity)
  - ある論理式がすべてのモデルにおいて真であるとき、その論理式は妥当である、という。
  - 妥当な論理式はトートロジー(恒真式)と呼ばれる。

- 充足可能性 (satisfiability)
  - ある論理式が何らかのモデルで真となるとき、その文は充足可能である、という。
  - $KB = R_1 \land R_2 \land R_3 \land R_4 \land R_5$の例では3つのモデルで真となるため充足可能である。
  - 論理式αがmで真である場合、mはαを充足する(satisfy)、もしくは、mはαのモデルである、という。

命題論理 (§7.4)
妥当性、充足可能性、背理法

- 背理法
  - 論理式$\alpha \land \neg\beta$が充足不能であるとき、またそのときに限り$\alpha \vDash \beta$である。
  - 反駁による証明とも言われる
  - 矛盾による証明とも言われる

- 充足不能とは、どのモデルにおいても偽となること。
  - αは、$\neg\alpha$が充足不能であるとき、またそのときに限り、妥当(トートロジー)である

- $\neg(\alpha \land \neg\beta) \equiv \neg\alpha \lor \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$であるから、背理法はまさに$\alpha \Rightarrow \beta$が妥当であることを調べている

命題論理 (§7.4)
妥当性、充足可能性、背理法

- 背理法の利点
  - αとβにわかれていた二つの論理式が一つの論理式になる
    - αの論理式とβの論理式を組み合わせて推論できる
  - 論理式が妥当であることを示すのではなく、論理式が充足不能であることを示せばよい
    - 論理式が妥当であることを直接示すには論理式全体が恒真であることを示さねばならず、式の置き換えで論理式全体が恒真となるように導くのは難しい
    - 充足不能であることを示すためには、追加される知識のうちのただ一つが偽になることを示せばいいだけ