知識工学(第 2 回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

論理的エージェント(7 章のつづき)

§7.4 命題論理の続き

〇命題論理の同値関係

論理的同値関係 ($\alpha \equiv \beta$): 真理値表において論理式αと論理式βの真理値がまったく同じとなるとき、αとβは論理的同値関係にある、といい、$\alpha \equiv \beta$と書く。これは$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真($=1$)となる式)となることに等しい。トートロジーは恒真式とも呼ばれる。

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

・論理的同値関係の例

$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma) \equiv \alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$

α	β	γ	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Rightarrow \gamma$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma)$	$\beta \land \gamma$	$\alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

・重要な論理的同値関係

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

〇命題論理で行いたい推論？

ブール関数の計算をするだけでなく、何か賢い推論を行いたい。

例: ワンパスワールドの知識ベース

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4: $B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{1,3})$

R_5: $\neg B_{1,1}$

R_6: $B_{2,1}$

R_7: $\neg B_{1,2}$

知識ベース: $KB = R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5 \wedge R_6 \wedge R_7$

この知識ベースが成り立つとき、例えば、次のようなことを知りたい。

$P_{2,2}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{2,2}$が成り立つのかどうか？

$P_{3,1}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{3,1}$が成り立つのかどうか？

ただし、例からもわかるように、知識ベース全体が真$(=1)$となるモデルだけ、つまり、各知識(R_2など)が真となるモデルだけを想定していることに注意しよう。例えば、R_6より$B_{2,1}$は真となるし、R_5より$B_{1,1}$は偽となる。

〇論理的同値関係による推論？

論理的同値関係を使えば、知識ベースの論理式を変換することによって、新しい知識を推論できそうだ。簡単な例として次の推論について考える。

例:

$R_1: P$

$R_2: P \Rightarrow Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

このとき、Qが成り立つかどうか知りたいとする。つまり、Pと$P \Rightarrow Q$が成り立つとき、Qが成り立つかどうか推論によって示したい。

$KB \equiv P \wedge (\neg P \vee Q) \equiv (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$

となって、$KB \equiv P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$であることがわかる。もともと$R_1$より、$P$が真であることを前提としていて、なおかつ、$KB$も真であることを前提としているから、必然的に$Q$も真でないといけない。従って$Q$が成り立つ。

例:

$R_1: P \Rightarrow Q$

$R_2: \neg Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

このとき、$KB \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$となる。この場合も同様に考えて$\neg P$が成り立つことがわかる。

　最初の例では、Qが推論の結果として得られているような気はするが、しかし、KBと$P \wedge Q$が等価であることがわかっただけで、Qが直接でてくるわけではない。どうやら、論理的同値関係を使って

求める推論結果に余分な論理式がついてきてしまうようだ。より形式的に「Qが推論できた」と言えるようにするにはどうすればいいのか。

〇命題論理の推論

ここでは、より形式的な命題論理の推論の定義を与える。論理的同値関係によって導出される結果は、知識ベースの一部＋新しい知識という形をとっているようにみえる。新しい知識だけきれいに導出できる「命題論理の推論」の定義を考えていくことにしよう。命題論理の推論には様々な定義が与えられ得るが、ここではひとまず次のように定義しよう。

$KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つとき、$KB$から$\alpha$が推論される、ということにしよう。これは、(i) 知識ベースの意味(真理値表)を変えずに、(ii) 知識ベースから知識を減ずることなく、(iii) 新しい論理式αを導出したことになる。命題論理における推論とはこのように論理的同値関係を用いて新しい論理式を導出することに他ならない。

KB

$\equiv KB \wedge \alpha_1$

$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2$

$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$

$\cdots$

$\equiv KB \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$

とできたときに、KBから$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$を推論できたということになる。

例:

$R_1 : P$

$R_2 : P \Rightarrow Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

KB

$\equiv KB \wedge P \wedge (\neg P \vee Q)$　　…(ベキ等律)

$\equiv KB \wedge \{(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)\}$　　…(分配律)

$\equiv KB \wedge P \wedge Q$

$\equiv KB \wedge Q$　　…(ベキ等律)

最初のベキ等律($P \equiv P \wedge P$)は知識ベースをコピーしていることに相当し、最後のベキ等律は余分なPをKBの中のPに吸収させていることになる。よって、$KB \equiv KB \wedge Q$となり、KBからQを推論することができたことになる。

　ここで、$KB \equiv KB \wedge \alpha$と書くかわりに、$KB \vDash \alpha$と書くことにし、この関係を伴意関係(はんいかんけい)と呼ぶことにしよう。上の例では、$KB \vDash Q$と書く。

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): 論理式αに対して、$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つとき、$\alpha$は$\beta$を伴意(はんい、entailment)する関係にある、といい、$\alpha \vDash \beta$と書く。これは、$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジー(恒真式)となることに等しい。

伴意関係の概念を用いて、命題論理の推論は次のように定義される。「知識ベースKBがあるとき、何らかの論理式αが成り立つかどうか、つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べることを推論(inference)」と呼ぶことにしよう。

　この伴意関係は論理的同値関係と並んで重要な概念である。まだ、不便そうな伴意関係であるが、伴意関係には様々な良い性質があり、命題論理の推論の基礎となっている。

第 2 回のまとめ

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

重要な論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	*ベキ等律*
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	*ベキ等律*
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	*交換律*
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	*交換律*
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	*結合律*
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	*結合律*
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	*復元律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	*対偶律*
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	*含意*
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	*双条件*
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	*ド・モルガン*
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	*分配律*
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	*吸収律*

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

推論: $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。