知識工学　第2回

二宮　崇

本日の講義内容

- 命題論理
  - 論理的同値関係
  - 伴意関係
  - 推論

教科書と資料

- 教科書
  - Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

- この講義のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

命題論理(§7.4)
論理的同値関係

- 論理的同値関係 $\alpha \equiv \beta$
  - 真理値表において論理式αと論理式βの真理値がまったく同じ
  - αとβは論理的同値関係にある、という
  - $\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい
    - トートロジー(恒真式): 命題記号にどんな真偽値を代入しても常に真となる論理式

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

命題論理(§7.4)
論理的同値関係

- 論理的同値関係の例

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma) \equiv \alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$$

α	β	γ	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Rightarrow \gamma$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma)$	$\beta \land \gamma$	$\alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \land (\alpha \Rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow (\beta \land \gamma)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

命題論理 (§7.4)
論理的同値関係

- 論理的同値関係の例

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	ベキ等律
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	ベキ等律
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	交換律
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	交換律
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	結合律
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	結合律
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	復元律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	対偶律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	含意
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	双条件
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	ド・モルガン
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	ド・モルガン
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	吸収律
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	吸収律

命題論理 (§7.4)
推論？

- 命題論理=ブール関数＋推論
- もっと賢い推論をやりたい！

命題論理 (§7.4)
こんな推論をしたい

例: ワンパスワールド

R_1: $\neg P_{1,1}$

R_2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4: $B_{1,2} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{1,3})$

R_5: $\neg B_{1,1}$

R_6: $B_{2,1}$

R_7: $\neg B_{1,2}$

知識ベース: $KB = R_1 \land R_2 \land R_3 \land R_4 \land R_5 \land R_6 \land R_7$

この知識ベースが成り立つとき、
$P_{2,2}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{2,2}$が成り立つのかどうか？
$P_{3,1}$が成り立つのかどうか？$\neg P_{3,1}$が成り立つのかどうか？
知りたい

命題論理 (§7.4)
論理的同値関係による推論？

- 論理的同値関係を使えば、新しい知識を推論できそう？

例:

R_1: P

R_2: $P \Rightarrow Q$

$KB = R_1 \land R_2$

このとき、Qが成り立つかどうか？

$$KB \equiv P \land (\neg P \lor Q) \equiv (P \land \neg P) \lor (P \land Q) \equiv P \land Q$$

KBが成り立つとき、Pも成り立ち、かつ、Qも成り立つ

命題論理 (§7.4)
論理的同値関係による推論？

例その2：

$R_1: P \Rightarrow Q$

$R_2: \neg Q$

$KB = R_1 \wedge R_2$

このとき、

$$KB \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$
$$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

KBが成り立つとき、 $\neg P$も成り立ち、$\neg Q$も成り立つ

命題論理 (§7.4)
論理的同値関係による推論？

- 最初の例ではKBと$P \wedge Q$が等価であることがわかっただけで、Qが直接でてくるわけではない。
- どうやら、論理的同値関係を使って求める推論結果には余分な論理式がついてきてしまうようだ。
- より形式的に「Qが推論できた」と言えるようにするにはどうすればいいのか。

命題論理(§7.4)
伴意関係と推論

- 推論
  - $KB \equiv KB \wedge \alpha$が成り立つとき、 KBからαが推論される
    - 知識ベースの意味(真理値表)を変えず
    - 知識ベースから知識を減ずることなく
    - 新しい論理式αを導出

推論とはこのように論理的同値関係を用いて新しい論理式を導出すること！

命題論理(§7.4)
伴意関係と推論

- 推論

KB

$\equiv KB \land \alpha_1$

$\equiv KB \land \alpha_1 \land \alpha_2$

$\equiv KB \land \alpha_1 \land \alpha_2 \land \alpha_3$

$\cdots$

$\equiv KB \land \alpha_1 \land \alpha_2 \land \alpha_3 \land \cdots \land \alpha_n$

とできたときに、KBから$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$を推論できたということになる。

命題論理(§7.4)
伴意関係と推論

- 推論の例

R_1: P
R_2: $P \Rightarrow Q$
$KB = R_1 \land R_2$

知識ベースのコピー

KB
$\equiv KB \land P \land (\neg P \lor Q)$ …(ベキ等律)
$\equiv KB \land \{(P \land \neg P) \lor (P \land Q)\}$ …(分配律)
$\equiv KB \land P \land Q$
$\equiv KB \land Q$ …(ベキ等律)

知識ベースへの吸収

よって、$KB \equiv KB \land Q$が成り立つ。

$KB \equiv KB \land \alpha$と書くかわりに、$KB \vDash \alpha$と書くことにし、この関係を伴意関係と呼ぶことにしよう。

命題論理(§7.4)
伴意関係と推論

- 伴意関係($\alpha \vDash \beta$)
  - $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$が成り立つ関係
  - αはβを伴意(はんい、entailment)する関係にある、という
  - $\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることに等しい。

命題論理(§7.4)
伴意関係と推論

- 命題論理の推論
  - 伴意関係を用いて次のように定義する

「知識ベースKBがあるとき、何らかの論理式αが成り立つかどうか、つまり、$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べることを推論(inference)と呼ぶ」