知識工学(第 13 回)

二宮 崇（ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp）

確率推論 (14 章)

§14.3 条件付き確率分布の効率的な表現

親の数をkとしたとき、CPT のサイズは $O(2^k)$となってしまう

〇基準的な分布(canonical distribution)

分布を決定するパターンといくつかのパラメータを与えることで CPT を再現

決定的なノード: 親の値によって、子の値が不確実性なく論理的に与えられる。

例

親ノード: $Canadian, US, Mexican$

子ノード: $NorthAmerican$

親ノード: 複数の車のディーラーの価格

子ノード: ユーザーの購入価格(最低価格を常に選択)

親ノード: 湖への流入水量，流出量

子ノード: 湖の水位

Noisy-OR モデル: 不確実な論理和のモデル。ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力が独立に与えられる確率モデル。

仮定 1) 原因が親によって全て列挙されている

仮定 2) ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力は他の親ノードに対し独立に与えられる。(各親ノードに対する中間ノードを定義し、中間ノードの論理和により子ノードの真偽を決定的に与えるモデルと等価)

$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \ \cdots \quad X_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \quad \downarrow$

$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \ \cdots \quad Z_n \ \rightarrow \ Y$ (論理和による決定的ノード)

例

親ノード: $Cold$, Flu, $Malaria$, 子ノード: $Fever$

$$q_{malaria} = P(\neg fever|\neg cold, \neg flu, malaria) = 0.1$$

$$q_{flu} = P(\neg fever|\neg cold, flu, \neg malaria) = 0.2$$

$$q_{cold} = P(\neg fever|cold, \neg flu, \neg malaria) = 0.6$$

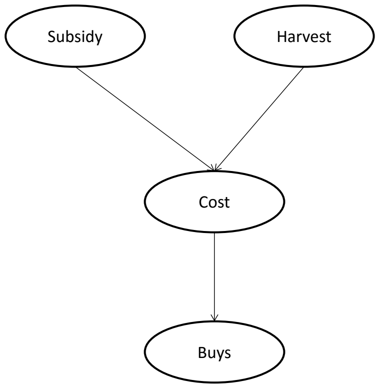
$$P(\neg y|X_1, \cdots, X_n) = \prod_{\{j:X_j=1\}} q_j$$

$$P(y|X_1, \cdots, X_n) = 1 - P(\neg y|X_1, \cdots, X_n)$$

CPT

$Cold$	Flu	$Malaria$	$P(\neg fever)$	$P(fever)$
0	0	0	1.0	0.0
0	0	1	$\mathbf{0.1}$	0.9
0	1	0	$\mathbf{0.2}$	0.8
0	1	1	$0.02 = 0.2 \times 0.1$	0.98
1	0	0	$\mathbf{0.6}$	0.4
1	0	1	$0.06 = 0.6 \times 0.1$	0.94
1	1	0	$0.12 = 0.6 \times 0.2$	0.88
1	1	1	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$	0.988

ハイブリッドベイジアンネット: 離散変数と連続変数の両方を持つベイジアンネット



論理確率変数: $Subsidy$(助成金), $Buys$(購入)

連続確率変数: $Harvest$ (収穫量), $Cost$(価格)

◇離散変数と連続変数に対する連続変数の確率分布

線形ガウス分布による収穫量hに対する価格cの確率分布

$$P(c|h, subsidy) = N(a_t h + b_t, \sigma_t^2)(c) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_t h+b_t)}{\sigma_t}\right)^2}$$

$$P(c|h, \neg subsidy) = N\left(a_f h + b_f, \sigma_f^2\right)(c) = \frac{1}{\sigma_f\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-(a_f h+b_f)}{\sigma_f}\right)^2}$$

◇連続変数に対する離散変数の確率分布

ある一定以上の値なら 1 に、以下なら 0 に近い確率分布

正規分布の累積分布関数 (プロビット分布)

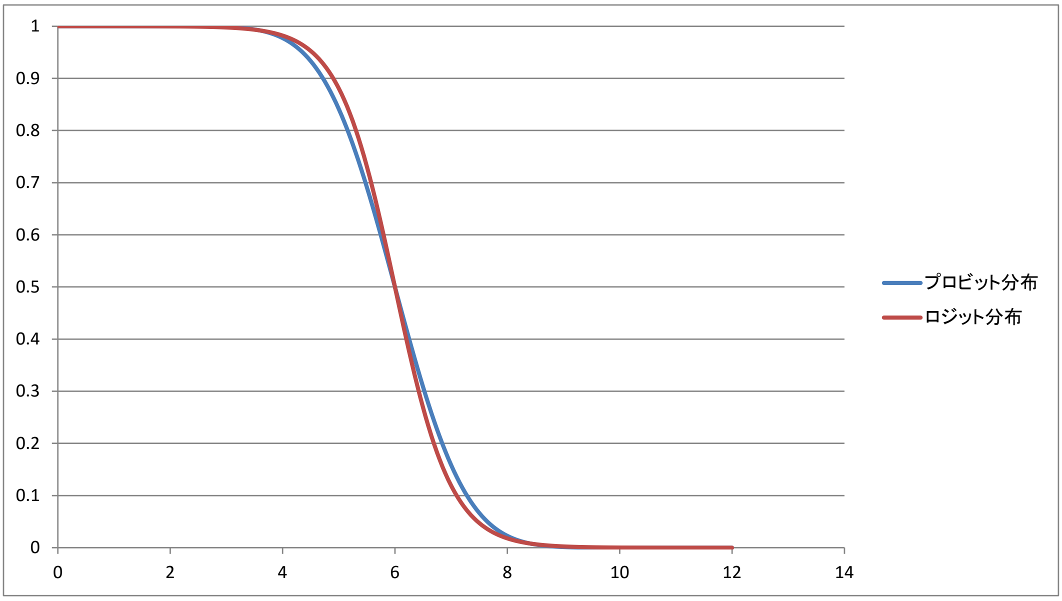
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} N(0,1)(x)dx$$

$$P(buys|Cost = c) = \Phi\left(\frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$

ロジスティック関数(ロジット分布)

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$P(buys|Cost = c) = \Phi\left(2\frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$



§14.4 ベイジアンネットの厳密推論

推論: 特定の観測事象$e_1, \cdots, e_n$が与えられたもとで、質問変数Xの事後確率分布$P(X|e_1, \cdots, e_n)$を計算すること。観測事象$e_1, \cdots, e_n$は証拠変数の集合$E_1, \cdots, E_n$に値を割り当てたもの。

全ての変数集合: $\{X\} \cup \{E_1, \cdots, E_n\} \cup \{Y_1, \cdots, Y_m\}$

$Y_1, \cdots, Y_m$: 隠れ変数(非証拠、非質問の変数集合)

例

$$P(Burglary|JohnCalls = true, MaryCalls = true)$$

$P(\neg b|j,m)$	$P(b|j,m)$
0.716	0.284

§14.4.1 列挙による推論

$$P(X|e_1, \cdots, e_n) = \alpha P(X, e_1, \cdots, e_n) = \alpha \sum_{Y_1, \cdots, Y_m} P(X, e_1, \cdots, e_n, Y_1, \cdots, Y_m)$$

ベイジアンネットを使って$P(X, e_1, \cdots, e_n, Y_1, \cdots, Y_m)$を求めて$P(X|e_1, \cdots, e_n)$を計算すれば良い。

例

$$P(Burglary|JohnCalls = 1, MaryCalls = 1)$$

$$P(B|j,m) = \alpha P(B,j,m) = \alpha \sum_E \sum_A P(B,j,m,E,A)$$

時間計算量 $O(n2^n)$

$$
\begin{aligned}
P(b|j,m) &= \alpha \sum_E \sum_A P(b)P(E)P(A|b,E)P(j|A)P(m|A) \\
&= \alpha P(b) \sum_E P(E) \sum_A P(A|b,E)P(j|A)P(m|A) \\
&= \alpha P(b)\big\{P(e)\big(P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) + \ P(\neg a|b,e)P(j|\neg a)P(m|\neg a)\big) \\
&+ P(\neg e)(P(a|b,\neg e)P(j|a)P(m|a) \ + \ P(\neg a|b,\neg e)P(j|\neg a)P(m|\neg a))\big\} \\
&= \alpha 0.001 \times (0.002 \times (0.95 \times 0.90 \times 0.70 + 0.05 \times 0.05 \times 0.01) + 0.998 \\
&\times (0.94 \times 0.90 \times 0.70 + 0.06 \times 0.05 \times 0.01)) = \alpha 0.00059224
\end{aligned}
$$

同様に$P(\neg b|j,m)$を求める

$$P(\neg b|j,m) = \alpha 0.00149191$$

よって、$P(B|j,m)$は次のようになる。

$P(\neg b\|j,m)$	$P(b\|j,m)$
0.716	0.284

時間計算量: $O(2^n)$