知識工学(第 11 回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

不確実性 (13 章)

§ 13.3 完全結合確率分布を用いた推論

$Toothache$ (歯痛), $Cavity$ (虫歯), $Catch$ (歯医者の不快なさぐり針が痛い歯にひっかかる)という三つの論理確率変数に対する完全結合分布

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

$$P(cavity \vee toothache) = 0.008 + 0.072 + 0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108 = 0.28$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

周辺化 (marginalization): 確率変数$X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n$に対し、

$$P(X_1, \cdots, X_m) = \sum_{Y_1, \cdots, Y_n} P(X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n)$$

例: $P(cavity) = 0.008 + 0.072 + 0.012 + 0.108 = 0.2$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

条件付確率

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} = \frac{0.012 + 0.108}{0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108} = 0.6$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \land toothache)}{P(toothache)} = 0.4$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	$P(Toothache, Cavity, Catch)$
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

$Cavity$に関しての計算ではどちらでも、$1/P(toothache)$が定数としてかけられていて、$P(Cavity|toothache)$の総和が1になる。この定数のことを正規化(normalization)定数と呼ぶ。正規化定数を表すのにαを用いる。

$$\begin{aligned} P(Cavity|toothache) &= \alpha P(Cavity, toothache) \\ &= \alpha[P(Cavity, toothache, catch) + P(Cavity, toothache, \neg catch)] \end{aligned}$$

$Cavity$	$P(Cavity, toothache)$	$P(Cavity|toothache)$
0	0.12	0.6
1	0.08	0.4

Xを質問の確率変数、$E_1, \cdots, E_m$を証拠の確率変数とし、$e_1, \cdots e_m$を$E_1, \cdots, E_m$の観測値とする。$Y_1, \cdots, Y_n$を残りの非観測変数の集合としたとき、

$$P(X|e_1, \cdots e_m) = \alpha P(X, e_1, \cdots e_m) = \alpha \sum_{Y_1, \cdots, Y_n} P(X, e_1, \cdots e_m, Y_1, \cdots, Y_n)$$

§13.4 独立

完全結合確率分布がわかっていれば、任意の離散確率変数の確率分布を得ることができる。

完全結合確率分布の問題点: 確率変数の数に対し、指数オーダーの表が必要。実際には数百や数千といった確率変数が存在するので、求めることはほぼ不可能。

○独立性の仮定

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy) \\ = P(cloudy|toothache, catch, cavity)P(toothache, catch, cavity)$$

しかし、歯痛や虫歯が天気に影響を及ぼすことはおよそありえない。従って、

$$P(cloudy|toothache, catch, cavity) = P(cloudy)$$

と仮定する。

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy) = P(cloudy)P(toothache, catch, cavity)$$

となる。

命題aとbの独立性: $P(a|b) = P(a) \quad or \quad P(b|a) = P(b) \quad or \quad P(a \wedge b) = P(a)P(b)$

確率変数の独立性: $P(X|Y) = P(X) \quad or \quad P(Y|X) = P(Y) \quad or \quad P(X, Y) = P(X)P(Y)$

独立性の例: コイントス　$P(C_1, \cdots, C_n) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i)$

§13.5 ベイズ規則とその使用法

$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$より

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)} \qquad (\text{ベイズ規則, Bayes' rule})$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

ある証拠$e_1, \cdots, e_n$に対して、

$$P(Y|X, e_1, \cdots, e_n) = \frac{P(X|Y, e_1, \cdots, e_n)P(Y|e_1, \cdots, e_n)}{P(X|e_1, \cdots, e_n)}$$

§13.5.1 ベイズ規則の適用: 単純なケース

○因果モデルと診断モデル

因果モデル: $P(effect|cause)$

診断モデル: $P(cause|effect)$

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

§13.5.2 ベイズ規則の適用：証拠の組合せ

○条件付き独立性

$$P(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha P(toothache \wedge catch|Cavity)P(Cavity)$$

$toothache$と$catch$は独立ではない。しかし、虫歯が存在しているかどうかが与えられたのなら、これらの二つは独立している。従って、

$$P(toothache \wedge catch|Cavity) = P(toothache|Cavity)P(catch|Cavity)$$

が成り立つ。

条件付き独立性: $P(X,Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z) \quad or \quad P(X|Y,Z) = P(X|Z) \quad or \quad P(Y|X,Z) = P(Y|Z)$

例

$P(Toothache, Catch, Cavity)$

$= P(Toothache, Catch|Cavity)P(Cavity)$

$= P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)P(Cavity)$

条件付の独立性の表明は、変数が増えても確率的なシステムを実現可能にし、さらに、それらの条件付独立性は絶対的独立性よりもはるかに多くの場合で成立する。

〇単純ベイズ (naïve Bayes)

$$P(Cause, Effect_1, \cdots, Effect_n) = P(Cause)\prod_i P(Effect_i | Cause)$$

このモデルによる識別器(classifier)はベイズ識別器(Bayesian classifier)と呼ばれる。