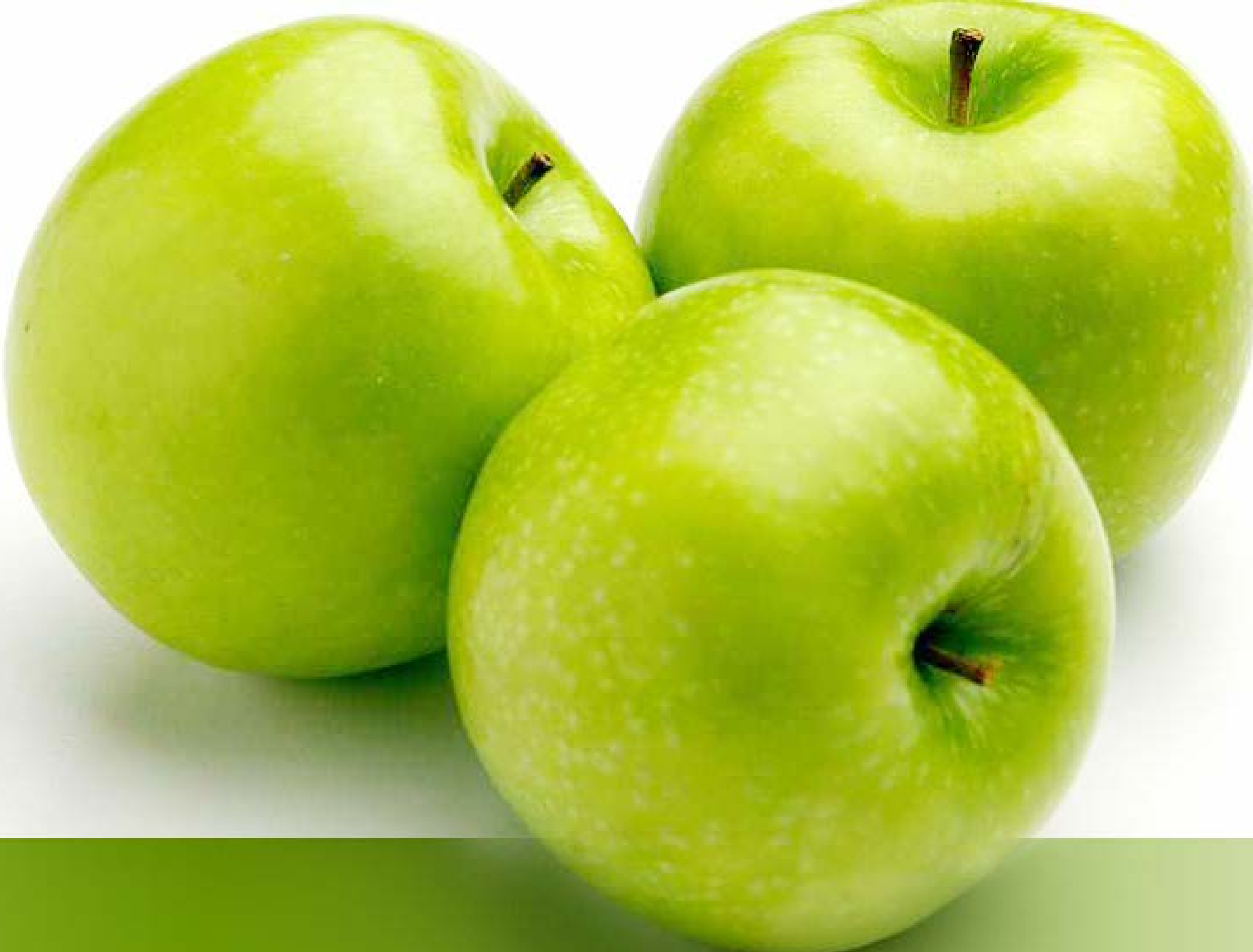

知識工学　第11回

二宮　崇

教科書と資料

- 教科書
  - Artificial Intelligence: A Modern Approach (3rd Edition): Stuart Russell, Peter Norvig (著), Prentice Hall, 2009

- この講義のウェブサイト

http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ke/

本日の講義内容

- 完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)
- 独立性 (§13.4)
- ベイズ規則 (§13.5)

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- $Toothache$ (歯痛), $Cavity$ (虫歯), $Catch$ (歯医者の不快なさぐり針が痛い歯にひっかかる)という三つの論理確率変数に対する完全結合確率分布

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- $Toothache$ (歯痛), $Cavity$ (虫歯), $Catch$ (歯医者の不快なさぐり針が痛い歯にひっかかる)という三つの論理確率変数に対する完全結合確率分布

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

$$P(cavity \vee toothache)$$
$$= 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28$$

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 周辺化 (marginalization)
  - 確率変数$X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n$に対し、

$$P(X_1, \cdots, X_m) = \sum_{Y_1, \cdots, Y_n} P(X_1, \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n)$$

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 周辺化 (marginalization)
  - 例: $P(cavity) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 条件付確率

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 条件付確率

$$P(\neg cavity | toothache) = \frac{P(\neg cavity \land toothache)}{P(toothache)} = 0.4$$

$Toothache$	$Cavity$	$Catch$	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.144
0	1	0	0.008
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.016
1	1	0	0.012
1	1	1	0.108

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 正規化定数
  - $Cavity$に関しての計算ではどちらでも、$1/P(toothache)$が定数としてかけられていて、$P(Cavity|toothache)$の総和が1になる。この定数のことを正規化(normalization)定数と呼ぶ。
  - 正規化定数を表すのにαを用いる。

$$P(Cavity|toothache) = \alpha P(Cavity, toothache)$$
$$= \alpha[P(Cavity, toothache, catch)$$

$Cavity$	$P(Cavity, toothache)$	$P(Cavity\|toothache)$
0	0.12	0.6
1	0.08	0.4

完全結合確率分布を用いた推論(§13.3)

- 正規化定数
  - Xを質問の確率変数、$E_1, \cdots, E_m$を証拠の確率変数とし、$e_1, \cdots e_m$を$E_1, \cdots, E_m$の観測値とする。$Y_1, \cdots, Y_n$を残りの非観測変数の集合としたとき、

$$P(X|e_1, \cdots e_m) = \alpha P(X, e_1, \cdots e_m)$$

$$= \alpha \sum_{Y_1, \cdots, Y_n} P(X, e_1, \cdots e_m, Y_1, \cdots, Y_n)$$

独立(§13.4)

- 完全結合確率分布
  - 完全結合確率分布がわかっていれば、任意の離散確率変数の確率分布を得ることができる。
- 完全結合確率分布の問題点
  - 確率変数の数に対し、指数オーダーの表が必要
  - 実際には数百や数千といった確率変数が存在するので、求めることはほぼ不可能

独立(§13.4)

- 独立性の仮定の例

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy)$$
$$= P(cloudy|toothache, catch, cavity)P(toothache, catch, cavity)$$

しかし、歯痛や虫歯が天気に影響を及ぼすことはおよそありえない。従って、

$$P(cloudy|toothache, catch, cavity) = P(cloudy)$$

と仮定する。すると、

$$P(toothache, catch, cavity, cloudy)$$
$$= P(cloudy)P(toothache, catch, cavity)$$

となる。

独立(§13.4)

- 命題aとbの独立

$$P(a|b) = P(a) \ \text{ or } \ P(b|a) = P(b) \ \text{ or } \ P(a \wedge b) = P(a)P(b)$$

↑上の三つはどれも同じ独立性を表している
(3つのうちどれか一つが満たされれば残りの二つも必ず満たされる)

- 確率変数の集合XとYの間の独立性

$$P(X|Y) = P(X) \quad or \quad P(Y|X) = P(Y) \quad or \quad P(X,Y) = P(X)P(Y)$$

- 独立性の例:コイントス

$$P(C_1, \cdots, C_n) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i)$$

ベイズ規則とその使用法(§13.5)

- ベイズ規則 (Bayes' rule)

  $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$より

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

ある証拠$e_1, \cdots, e_n$に対して、

$$P(Y|X, e_1, \cdots, e_n) = \frac{P(X|Y, e_1, \cdots, e_n)P(Y|e_1, \cdots, e_n)}{P(X|e_1, \cdots, e_n)}$$

ベイズ規則の適用: 単純なケース (§13.5.1)

- 因果モデルと診断モデル
  - 因果モデル: $P(effect|cause)$
  - 診断モデル: $P(cause|effect)$

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

ベイズ規則の適用: 証拠の組合せ (§13.5.2)

$$P(Cavity|toothache \land catch) = \alpha P(toothache \land catch|Cavity)P(Cavity)$$

$toothache$と$catch$は独立ではない。しかし、虫歯が存在しているかどうかが与えられたのなら、これらの二つは独立している。

従って、

$$P(toothache \land catch|Cavity) = P(toothache|Cavity)P(catch|Cavity)$$

が成り立つ。

ベイズ規則の適用: 証拠の組合せ (§13.5.2)

- 条件付き独立性

$$P(X,Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z)$$
$$P(X|Y,Z) = P(X|Z)$$
$$P(Y|X,Z) = P(Y|Z)$$

↑上の三つはどれも同じ条件付き独立性を表している
(3つのうちどれか一つが満たされれば残りの二つも必ず満たされる)

ベイズ規則の適用: 証拠の組合せ (§13.5.2)

- 条件付き独立性の例

$$P(Toothache, Catch, Cavity)$$
$$= P(Toothache, Catch|Cavity)P(Cavity)$$
$$= P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)P(Cavity)$$

- 条件付の独立性の表明は、変数が増えても確率的なシステムを実現可能

- 条件付独立性は絶対的独立性よりもはるかに多くの場合で成立する。

ベイズ規則の適用: 証拠の組合せ (§13.5.2)

- 単純ベイズ (naïve Bayes)

$$P(Cause, Effect_1, \cdots, Effect_n) = P(Cause) \prod_i P(Effect_i | Cause)$$

- このモデルによる識別器(classifier)はベイズ識別器(Bayesian classifier)と呼ばれる。