平成 29 年度情報数学Ⅰ 第 1 回レポート課題

次の問題 1～4 を解き、その解答を提出せよ。所属、学生証番号、名前をレポートの一番上に記入せよ。

提出方法：レポートを講義開始時に直接提出。
〆切: 2017 年 6 月 28 日(水) 12:40 (講義開始時に回収します)

問題 1. 次の(a)～(b)に解答せよ。

(a) 関係≡を、$x \equiv y \ (mod\ 5)$ で表される 5 を法とする整数の集合$\mathbb{Z}$上の合同関係とする。この合同関係≡は同値関係であることを示し、この合同関係≡による集合$\mathbb{Z}$の商$\mathbb{Z}/\equiv$を求めよ。

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$上の 2 項関係~を

$$(a,b) \sim (c,d) \ \Leftrightarrow \ a+d=b+c$$

と定義する。関係~は同値関係となることを示し、この同値関係~による集合$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$の商$\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$を求めよ。

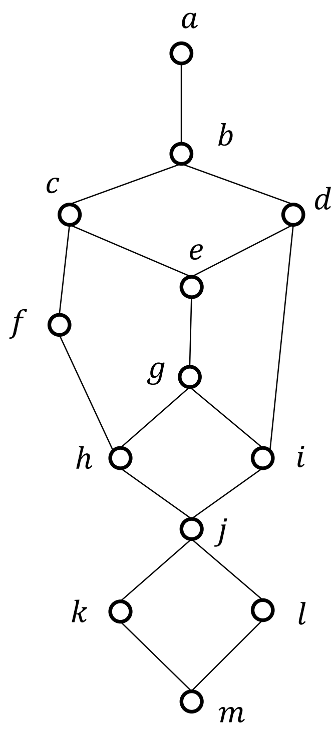

図 1 半順序集合Qのハッセ図

問題 2. 次の(a)～(c)に解答せよ。

(a) 図 1 で表される半順序集合Qの部分集合を$X=\{f,g,d\}$としたとき、この部分集合Xの上界の集合、上限、下界の集合、下限を示せ。次に、この半順序集合Qの要素fと比較不能な要素を全て示せ。

(b) 集合を$S=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$とする。この集合$S$上に包含関係⊆を定義したとき、この集合$S$上の包含関係⊆は半順序関係となることを示し、この集合Sが半順序集合となることを示せ。次にこの半順序集合Sのハッセ図を示せ。

(c) Sを 2 次元ベクトルの集合$S=\{(i,j) \mid i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2,3\}\}$とする。これらの 2 次元ベクトルに対して、半順序≼を

$$(x_1,x_2) \preccurlyeq (y_1,y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 \le y_1) \text{かつ} (x_2 \le y_2)$$

で定義する。半順序集合$(S;\preccurlyeq)$のハッセ図を示せ。

問題 3. 次の(a)～(d)に解答せよ。

(a) 集合S上の半順序関係Rが満たすべき 3 つの性質である、反射律、反対称律、推移律を式の形で表せ。

(b) 束 $(L;\wedge,\vee)$ が満たすべき 4 つの性質である、交換律、結合律、吸収律、ベキ等律を式の形で表せ。

(c) 束 $(L;\wedge,\vee)$ が満たすべき基本的性質である、交換律、結合律、吸収律だけを用いて、ベキ等律が成り立つことを示せ。

(d) 束に分配律

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

を仮定すると、双対的な分配律

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

が得られることを示せ。

(e) 代数系としての束 $(L;\wedge,\vee)$ において、関係$\preccurlyeq$を次のように定義したとき、$(L;\preccurlyeq)$は半順序集合となることを示せ。

$$x\vee y=y\text{であるとき、}x\preccurlyeq y$$

問題 4. 次の(a)～(c)に解答せよ。

(a) ブール関数$f(X,Y,Z)=\overline{X\cdot\bar{Y}+Z}$の真理値表を作成せよ。また、このブール関数$f(X,Y,Z)$を実現する回路を、ゲート回路(AND ゲート、OR ゲート、NOT ゲート)を用いて構成せよ。

(b) 以下に示すブール関数$f(X,Y,Z)$を簡単化したブール関数を求めよ。

$$f(X,Y,Z)=Y+(Z+X\cdot Z)\cdot(\bar{Z}+X\cdot\bar{Y})+\overline{\bar{X}+Y+\bar{Z}}$$

(c) 以下に示すブール関数$f(X,Y,Z)$を簡単化したブール関数を求めよ。

$$f(X,Y,Z)=X\cdot Y+(\overline{\bar{X}+\bar{Y}}+Y)\cdot(X+\bar{X}\cdot Y+Z)+(Z+\overline{\bar{X}+\bar{Z}})\cdot(\bar{Z}+X\cdot\bar{Y})+\overline{\bar{X}+Y+\bar{Z}}$$