情報数学Ⅰ

第 9 回「グラフについての基本的概念」

§5.1 グラフ

§5.1.1 グラフ

グラフ(無向グラフ)Gの定義

V: 空でない有限集合。Vの要素を点または頂点という。

$E \subseteq V \times V$: Vの 2 元の関係の有限集合。Eの要素を辺という。ただし、各辺は順序対ではなく、順序に依存しない対とする。

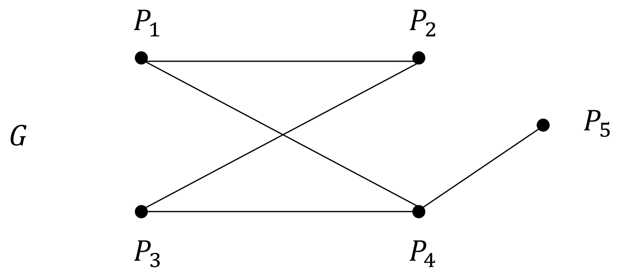
$G = (V, E)$: 頂点集合Vと辺集合Eから成る順序対をグラフという。

(例)

$G = (V, E)$

$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

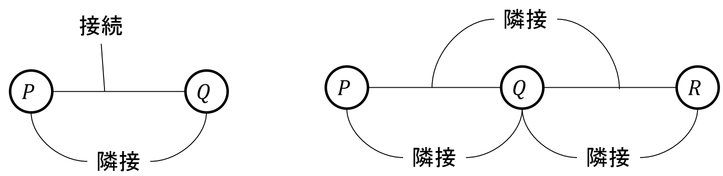
$E = \{(P_1, P_2), (P_1, P_4), (P_2, P_3), (P_3, P_4), (P_4, P_5)\}$



端点: 辺$e = (P, Q)$に対し、頂点Pと頂点Qは辺eの端点という。

接続: 辺$e = (P, Q)$に対し、頂点Pと辺eおよび頂点Qと辺eは接続しているという。

隣接: 辺$e = (P, Q)$に対し、頂点Pと頂点Qは隣接しているという。また、辺e_1, e_2が同じ点Pに接続しているとき、辺e_1と辺e_2は隣接しているという。



ループ: 端点が同じ頂点になっている辺をループという。

多重辺：同じ端点を持つ辺が複数あるとき、それらの辺を多重辺という。

単純グラフ：多重辺やループを持たないグラフ。
多重グラフ：単純グラフでないグラフ。

無限グラフ：頂点や辺の個数が有限でないグラフ。

空グラフ：辺集合が空集合であるグラフ。

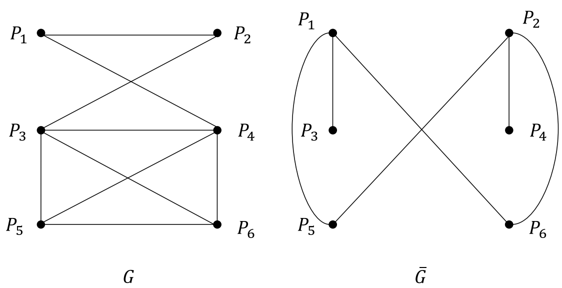
ハイパーグラフ：$G=(V,E)$において$E\subseteq 2^V$としたグラフ。多項関係を表す。（上述のグラフは 2 項関係）

〇部分グラフ
部分グラフ：二つのグラフ$G=(V,E)$と$G'=(V',E')$に対し、$V'\subseteq V$かつ$E'\subseteq E$であるとき、G'はGの部分グラフといい、$G'\subseteq G$と表す。

全域部分グラフ：頂点集合は等しく、辺集合が部分集合となっている部分グラフを全域部分グラフという。$G'\subseteq G$かつ$V'=V$。

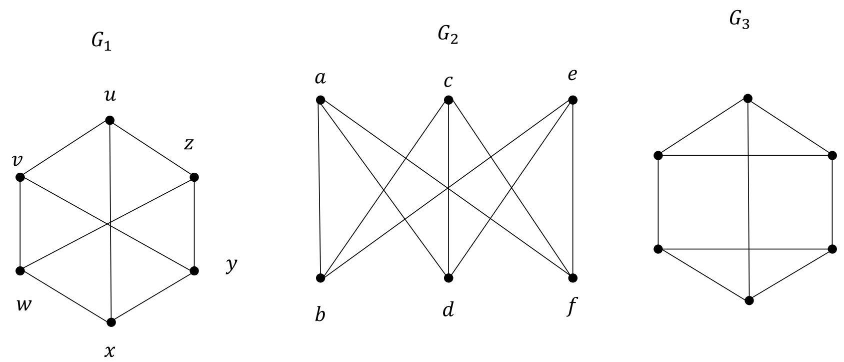
補グラフ：$\bar{E}=\{(P,Q)\mid P,Q\in V, P\neq Q$かつ$(P,Q)\notin E\}$としたとき、$\bar{G}=(V,\bar{E})$を補グラフという。

（例）



〇等しいグラフと同型のグラフ
グラフが等しい $G_1=G_2$：二つのグラフ$G_1=(V_1,E_1)$と$G_2=(V_2,E_2)$に対し、$V_1=V_2$かつ$E_1=E_2$。
グラフが同型 $G_1\cong G_2$：二つのグラフ$G_1=(V_1,E_1)$と$G_2=(V_2,E_2)$に対し、V_1からV_2への全単射写像φが存在し、$(P,Q)\in E_1\Leftrightarrow(\varphi(P),\varphi(Q))\in E_2$。

（例）



$$G_1 \cong G_2:\ \varphi(u) = a, \varphi(v) = b, \varphi(w) = c, \varphi(x) = d, \varphi(y) = e, \varphi(z) = f$$
$$G_1 \ncong G_3$$

〇次数

次数：１つの頂点Pに接続している辺数。$d(P)$または$\deg(P)$で表す。

孤立点：次数０の頂点

端点：次数１の頂点

奇頂点：奇数次数の頂点

偶頂点：偶数次数の頂点

（握手の定理）グラフ$G = (\{P_1, \cdots, P_p\}, E)$において、辺の数を$q$とすると、$\sum_{i=1}^{p} d(P_i) = 2q$が成り立つ。

（定理）奇頂点の個数は偶数である。

〇隣接行列、接続行列

グラフ$G = (\{P_1, \cdots, P_p\}, \{e_1, \cdots, e_q\})$とする。

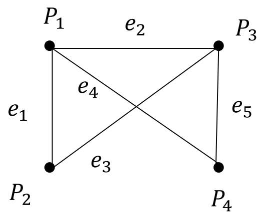
隣接行列 $A = (a_{ij})$：$p \times p$行列。$a_{ij} = P_i$とP_jを結ぶ辺の数。無向グラフの隣接行列は対称行列となる。

接続行列 $M = (m_{ij})$：$p \times q$行列。$m_{ij} = P_i$がe_jに接続する回数。

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & P_i\text{と}e_j\text{が接続していないとき} \\ 1 & P_i\text{と}e_j\text{が接続しているとき(非ループ)} \\ 2 & P_i\text{と}e_j\text{が接続しているとき(ループ)} \end{cases}$$

（注）単純グラフではこれらの行列の要素は全て0か1。

（例）



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

（注）多重グラフの例については教 p. 137 参照。

§5. 1. 2 経路

経路(walk)：グラフGの頂点と辺が交互に現れる有限な列$W=P_0e_1P_1e_2P_2\cdots e_nP_n$を経路または歩道という。

・P_0を始点、P_nを終点といい、WをP_0-P_n経路という。
・辺数nを経路Wの長さといい、$|W|=n$または$l(W)=n$と書く。
・$P_0=P_n$のとき、Wは閉じているという。
・単純グラフに対しては、経路Wを$P_0P_1P_2\cdots P_n$と書く。
・経路$W_1=P\cdots Q$と経路$W_2=Q\cdots R$をつなげてできる経路$P\cdots R$をW_1W_2と書く。

小道(trail)：同じ辺を通らない経路

道(path)：同じ頂点を通らない経路

閉路(cycle)：閉じている道を閉路またはサイクルという。長さnの閉路をn-閉路という。

（注）経路を道という場合もあり、その場合、小道は単純道と呼ばれ、上記の道は基本道と呼ばれる。

（定理）全ての頂点の次数が2以上である有限グラフは必ず閉路を含む。
証明の概略：グラフが多重グラフであれば、多重辺やループのところで閉路が存在する。単純グラフであれば、どこかの頂点を始点として、異なる頂点を順に辿りながら小道をつくることができ、頂点数が有限ならば、必ずいつか以前通った頂点に辿りつくため、そこで閉路ができる。