

情報数学 I

第 7 回 「順序集合-半順序集合、束、ブール束」

§ 4.2 束とブール代数

§ 4.2.1 束 (lattice)

束 (lattice): 半順序集合 L において、 $\forall x, y \in L$ に対して、上限 $\sup\{x, y\}$ および下限 $\inf\{x, y\}$ が常に存在する半順序集合 L を束という。

結び (join): 束 L において上限 $\sup\{x, y\} = x \vee y$ と表し、結び (join) という。

交わり (meet): 束 L において下限 $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ と表し、交わり (meet) という。

○代数系

集合 A に対し、 $A \times A$ から A への写像を A の 2 項演算という。また、 $*$ が A の 2 項演算であるとき、 A は 2 項演算 $*$ について閉じているという。

代数系: 集合 A に演算 $*$ が定義されているとき、集合 A と演算 $*$ をあわせて代数系 $(A; *)$ といい、群、環、体、束などがある。

[定理]

代数系 $(L; \wedge, \vee)$ が次の性質を満たすとき L は束である。

(1) 交換律を満たす。 $\forall x, y \in L$ に対して

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

(2) 結合律を満たす。 $\forall x, y, z \in L$ に対して

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

(3) 吸収律を満たす。 $\forall x, y \in L$ に対して

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

上記(1)～(3)を満たす代数系 $(L; \wedge, \vee)$ に対し、半順序関係 \leq を次のように定義すれば、半順序集合 $(L; \leq)$ になる。

$$a \wedge b = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b$$

$$(\text{もしくは } a \vee b = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b)$$

半順序集合の束 $(L; \leq)$	代数系の束 $(L; \wedge, \vee)$
上限 $\sup\{x, y\}$	$x \vee y$
下限 $\inf\{x, y\}$	$x \wedge y$
$a \leq b$	$a \wedge b = a$ (または $a \vee b = b$)

有限な束には必ず最大元(1と書く)と最小元(0と書く)が存在する。

§ 4.2.2 ブール代数

○分配束

分配束： L を束とする。次の分配律を満たすとき、この束 L を分配束という。

(1) 分配律

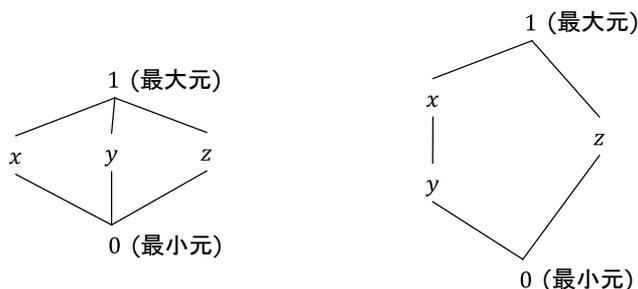
$\forall x, y, z \in L$ に対して、

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

[定理]

束 L が、次のハッセ図で表される束に同型な部分束を含まないならば L は分配束である。



○ブール束

補元 (complement)： L を束とする。 $x \in L$ に対して、

$$x \vee a = 1 \text{ (最大元)}$$

$$x \wedge a = 0 \text{ (最小元)}$$

を同時に満たす a を x の補元といい、 \bar{x} で表す。

相補束：束 L のすべての要素が少なくとも1つの補元をもつとき、 L を相補束という。

ブール束 (boolean lattice)、ブール代数(boolean algebra)：分配束でありかつ相補束である束をブール束またはブール代数という。

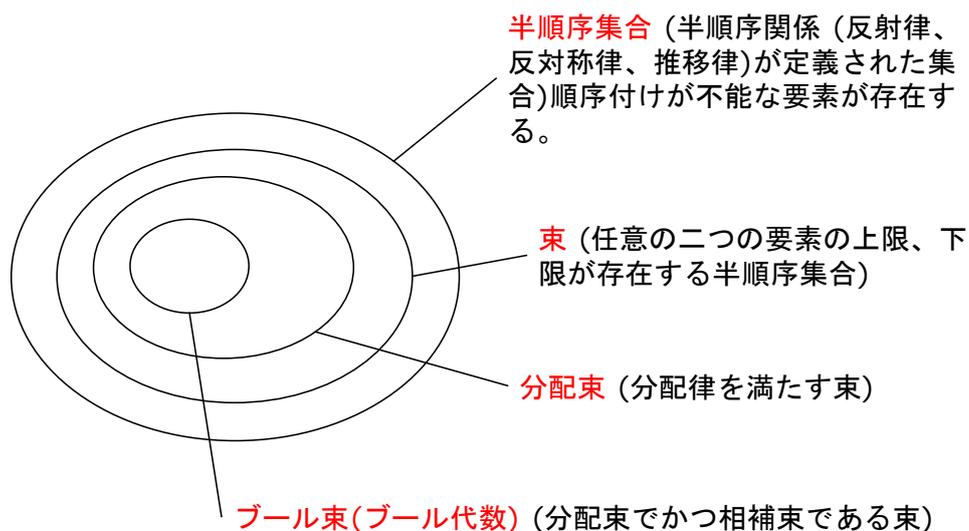
[定理]

分配束において相補束であるならば、任意の要素の補元はただ一つ存在する。この定理より、単項演算 $\bar{\quad}$ が定義でき、それを補演算という。

(注) 演算した結果は一意でないといけない

すなわち、ブール束では、2種類の2項演算 \vee, \wedge と1種類の単項演算 $\bar{\quad}$ が定義される。これらの演算をブール演算という。

順序集合の包含関係



○ブール代数の性質

集合 B がブール代数であるとき、 $\forall x, y, z \in B$ に対して次の法則が成り立つ。

(1) 結合律 (束の条件)

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

(2) 交換律 (束の条件)

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

(3) 吸収律 (束の条件)

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

(4) ベキ等律 (束の性質)

$$x \vee x = x$$

$$x \wedge x = x$$

(5) 分配律 (分配束の条件)

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

(6) 復元律 (相補束の条件)

$$\bar{\bar{x}} = x$$

(7) ド・モルガン律

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

(8) 補元の性質 (相補束の条件)

$$x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \wedge \bar{x} = 0$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

(9) 0 の性質 (束の条件)

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 0 = 0$$

(10) 1 の性質 (束の条件)

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 1 = x$$

(11) 補元の吸収 (分配律と補元の性質より)

$$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$$

$$x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$$

○双対 (dual)

ブール代数の命題の \vee と \wedge および 0 と 1 を交換して得られる命題をブール代数の双対という。

(例) $x \vee 1 = 1$ の双対は $x \wedge 0 = 0$ である。

[定理] 双対原理

ブール代数において任意の定理の双対も定理である。