情報数学Ⅰ

第 6 回「順序集合-半順序集合」

§4 順序集合と束

§4.1 順序

順序集合：順序関係が定義された集合を順序集合といい、半順序集合、束、ブール束がある。

順序関係…大小関係、包含関係、力関係、優先関係

（応用）ジョブ管理、データベース、計算機演算回路の数学的表現（ブール代数）、型理論

§4.1.1 半順序と全順序

半順序関係（partial order relation）、半順序集合（partially ordered set）：集合S上の関係Rが次の 3 つの条件を満たすとき、この関係Rを半順序関係という。

(1) 関係Rは反射的である。すなわち、$\forall x \in S$に対して、xRxが成り立つ。

(2) 関係Rは反対称的である。すなわち、$\forall x, y \in S$に対して、xRyかつyRxならば$x = y$が成り立つ。

(3) 関係Rは推移的である。すなわち、$\forall x, y, z \in S$に対して、xRyかつyRzであるならばxRzが成り立つ。

（注）半順序関係の半という意味は順序付きが定義されない要素対が存在する、ということ。

半順序関係が定義された集合Sを半順序集合という。

比較可能、比較不能：半順序集合において、その要素xとyがxRyまたはyRxであるならば、xとyは比較可能であるという。$x \not R y$かつ$y \not R x$であるならば、xとyは比較不能であるという。（順序付けができない要素対）

全順序集合：半順序集合において、全ての要素対が比較可能であるとき、この順序集合を全順序集合という。

§4.1.2 ハッセ図

ハッセ図：半順序集合Sの要素を節点とし、xRyで、xRzかつzRyとなるような要素zが存在

しないとき、節点xとyを辺で結んだ図式をハッセ図という。

ベキ集合：集合Sの部分集合からなる集合を集合Sのベキ集合といい、2^Sで表す。すなわち、
$2^S = \{X | X \subseteq S\}$
（注）空集合ϕやSを含む
$|2^S| = 2^{|S|}$が成り立つ。

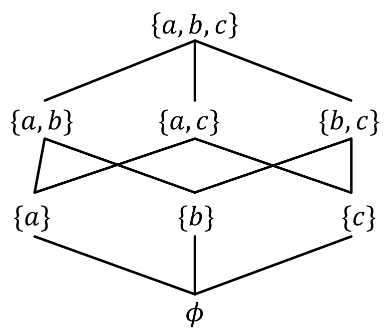
（例）集合$S = \{a, b, c\}$のベキ集合2^Sを求めよ。次に2^S上の包含関係$\subseteq$は半順序関係である。これを示し、そのハッセ図を作成せよ。また、比較不能な要素対を示せ。

（解）

$$2^S = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2^S上の包含関係$\subseteq$は以下の性質をもつ。

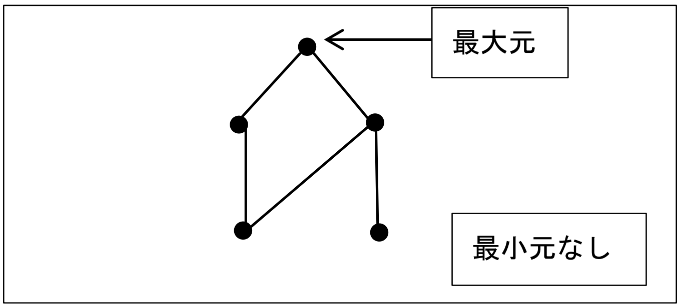
(1) $\forall X \in 2^S$に対して、$X \subseteq X$が成り立つ。よって包含関係$\subseteq$は反射的である。
(2) $\forall X, Y \in 2^S$に対して、$X \subseteq Y$かつ$Y \subseteq X$であるならば$X = Y$である。よって包含関係$\subseteq$は反対称的である。
(3) $\forall X, Y, Z \in 2^S$に対して、$X \subseteq Y$かつ$Y \subseteq Z$ならば、$X \subseteq Z$が成り立つ。よって、包含関係$\subseteq$は推移的である。
従って、(1) (2) (3) より、包含関係$\subseteq$は半順序関係である。よって、このSのベキ集合は半順序集合である。



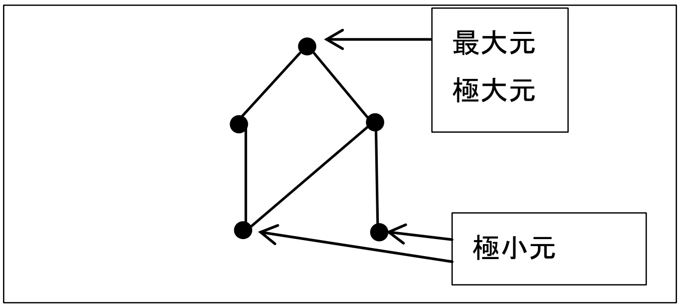
比較不能な要素対
$\{a\}$と$\{b\}$、$\{b\}$と$\{c\}$、$\{c\}$と$\{a\}$、
$\{a, b\}$と$\{a, c\}$、$\{a, c\}$と$\{b, c\}$、$\{a, b\}$と$\{b, c\}$、
$\{a, b\}$と$\{c\}$、$\{a, c\}$と$\{b\}$、$\{b, c\}$と$\{a\}$
（注）包含関係にない要素対である。

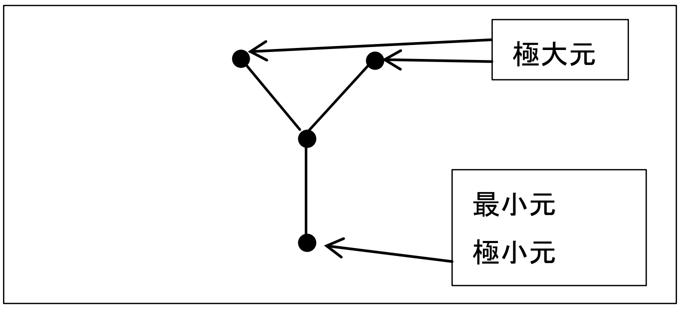
§4.1.3 上限、下限

最大元、最小元：半順序集合 $(S;\leq)$ において、全ての要素$x\in S$に対して、$x\leq a$となる要素aをSの最大元、$b\leq x$となる要素bをSの最小元という。



極大元、極小元：半順序集合 $(S;\leq)$ において、任意の要素$x\in S$に対して、$a\leq x\Rightarrow a=x$となるaをSの極大元、$x\leq b\Rightarrow b=x$となるbをSの極小元という。（半順序関係において、それより上がない要素が極大元、それより下がない要素が極小元）



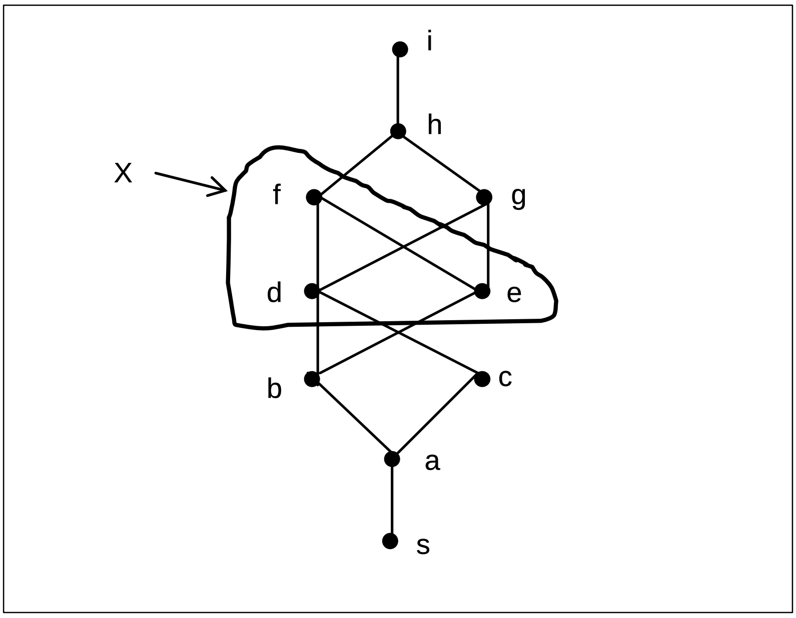


上界（upper bound）、上限（least upper bound）：Sを半順序集合とする。XをSの部分集合とする。Rを半順序関係とする。全ての$x \in X$に対して、xRbであるとき、bを部分集合Xの上界という。Xの任意の上界b'に対して、bRb'が成り立つ最小上界bを部分集合Xの上限といい、$\sup X$で表す。

（注）xRy ： xはyの下流にある

下界（lower bound）、下限（greatest lower bound）：全ての$x \in X$に対して、cRxであるとき、cを部分集合Xの下界という。Xの任意の下界c'に対して、$c'Rc$が成り立つ最大下界cを部分集合Xの下限といい、$\inf X$で表す。

（例）



半順序集合Sの部分集合$X = \{d, e, f\}$を考える。

① 部分集合Xの上界の集合$= \{f, h, i\}$

② Xの上限$= \sup\{d, e, f\} = f$

③ Xの下界の集合$= \{b, a, s\}$

④ Xの下限$= \inf\{d, e, f\} = b$