情報数学 I

第 5 回「関係-合同関係、写像」

〇合同関係

合同関係： $a, b \in \mathbb{Z}$ (整数の集合)，$m \in \mathbb{N}$(自然数の集合)に対して、$a-b$はmで割り切れる($a-b$はmの倍数である)とき、“aはbとmを法とする合同関係にある”といい、$a \equiv b \pmod{m}$と書く(または$a \equiv_m b$とも書く)。

合同関係はaをmで割った余りとbをmで割った余りが等しい関係でもある。

この合同関係は、数学者ガウス(1777 年～1855 年)が定義した。

(例 1) $x, y \in \mathbb{Z}$に対する関係Rを$x \equiv y \pmod{m}$とする。Rが同値関係であることを示せ。
(解) 集合$\mathbb{Z}$の合同関係$\equiv$が反射的かつ対称的かつ推移的であることを示せばよい。

(1) $\forall x \in \mathbb{Z}$に対し、$x - x = 0$はmで割り切れる。従って、$x \equiv x \pmod{m}$が成り立つ。よって、合同関係$\equiv$は反射的である。

(2) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$に対して、$x \equiv y \pmod{m}$が成り立っているとする。そうすると、$x-y$は$m$で割り切れる。$-(x-y) = y - x$は$m$で割り切れる。すなわち、$y \equiv x \pmod{m}$が成り立つ。よって、合同関係$\equiv$は対称的である。

(3) $x, y, z \in \mathbb{Z}$に対して、$x \equiv y \pmod{m}, \mathrm{y} \equiv \mathrm{z} \pmod{\mathrm{m}}$が成り立つとする。すると、$x-y$と$y-z$は$m$で割り切れる。$(x-y)+(y-z) = x-z$も$m$で割り切れる。すなわち$x \equiv z \pmod{m}$が成り立つ。よって、合同関係$\equiv$は推移的である。

(1)，(2)，(3)より、合同関係$\equiv$は同値関係である。

(例 2) 集合$\mathbb{Z}$上の合同関係$\equiv$は同値関係である。この合同関係$\equiv$による集合$\mathbb{Z}$の商$\mathbb{Z}/\equiv$すなわち$\mathbb{Z}$の同値類への分割を求めよ。
(解)
$0 \in \mathbb{Z}$と合同関係$\equiv$にある同値類C_0は

$$\begin{aligned} C_0 &= \{x \mid x \equiv 0 \pmod m, x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid x - 0 \text{ は} m \text{で割り切れる}\} \\ &= \{\cdots, -2m, -m, 0, m, 2m, \cdots\} \end{aligned}$$

$1 \in \mathbb{Z}$と合同関係$\equiv$にある同値類C_1は

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x \mid x \equiv 1 \pmod m, x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid x - 1 \text{ は} m \text{で割り切れる}\} \\ &= \{\cdots, -2m + 1, -m + 1, 1, m + 1, 2m + 1, \cdots\} \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$と合同関係$\equiv$にある同値類C_kは

$$\begin{aligned} C_k &= \{x \mid x \equiv k \pmod m, x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid x - k \text{は} m \text{で割り切れる}\} \\ &= \{\cdots, -2m + k, -m + k, k, m + k, 2m + k, \cdots\} \end{aligned}$$

$m - 1 \in \mathbb{Z}$と合同関係$\equiv$にある同値類C_{m-1}は

$$\begin{aligned} C_{m-1} &= \{x \mid x \equiv m - 1 \pmod m, x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -m - 1, -1, m - 1, 2m - 1, 3m - 1, \cdots\} \end{aligned}$$

従って、$\mathbb{Z}/\equiv = \{C_0, C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}\}$となる。

集合$\mathbb{Z}$上のmを法とする合同関係$\equiv$は周期がmである周期構造を構成する。

C_0 $\downarrow$	C_1 $\downarrow$	C_2 $\downarrow$		C_k $\downarrow$		C_{m-1} $\downarrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$-2m$	$-2m+1$	$-2m+2$	$\cdots$	$-2m+k$	$\cdots$	$-m-1$
$-m$	$-m+1$	$-m+2$	$\cdots$	$-m+k$	$\cdots$	-1
0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	$m-1$
m	$m+1$	$m+2$	$\cdots$	$m+k$	$\cdots$	$2m-1$
$2m$	$2m+1$	$2m+2$	$\cdots$	$2m+k$	$\cdots$	$3m-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

§2.2 写像

§2.2.1 写像

写像（mapping），関数（function）：集合S,Tが与えられたとき、全ての各々の$x \in S$（Sの１個の要素）に対して、それぞれただ一つの要素$y \in T$を対応させる関係fが定まっているとする。fを集合Sから集合Tへの写像あるいは関数といい、$f: S \rightarrow T$または$S \xrightarrow{f} T$で表す。Sをfの定義域(domain)、Tをfの値域(range)という

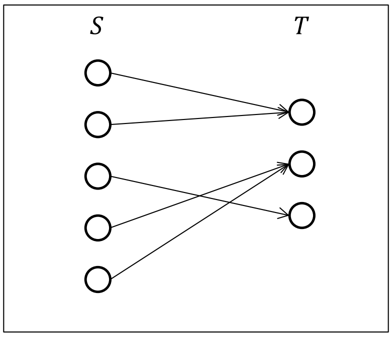
（注）数値を数値に写像する関数（既に習った関数）

汎関数：関数を数値に写像する。

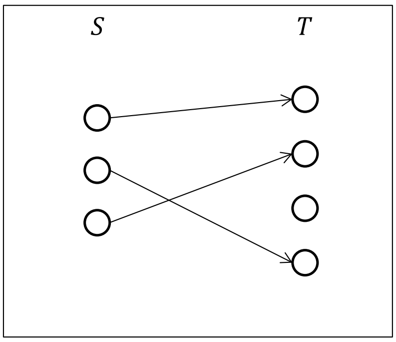
作用素：関数を関数に写像する。

$$\text{写像(関数)}\begin{cases}\text{全射}\\\text{単射}\\\text{全単射}\end{cases}$$

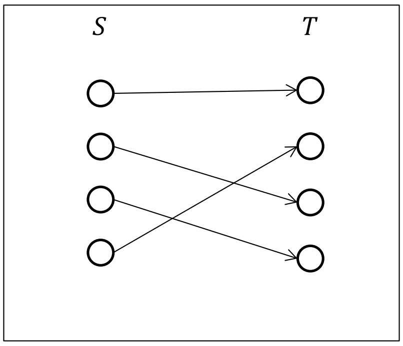
全射（surjection）：写像$f: S \rightarrow T$において、T内の全ての要素がS内の少なくとも一つの要素に対応するとき、写像は全射であるという



単射（injection）：写像$f: S \rightarrow T$において、$f(S)$の要素がSのただ一つの要素に対応するとき、この写像fは単射であるという。



全単射（bijection）: 写像 $f: S \to T$においてfが全射かつ単射であるとき、この写像は全単射であるという。$|S| = |T|$となる。



全単射同型，対等（equipotent）: 集合Sから集合Tへの全単射が存在するとき、SとTは全単射同型、または、対等であるという。

§2.2.3 可付番集合
無限集合の要素の数を数える

濃度(cardinality)：2 つの集合A, Bの間に全単射写像が存在するとき、A, Bは同じ濃度であるという。無限集合の要素の数を濃度（cardinality)で表現。

可付番濃度: 自然数全体の集合$\mathbb{N}$の濃度を可算濃度または可付番濃度という。(無限集合の濃度の基本)

可付番集合: 自然数全体の集合$\mathbb{N}$と同じ濃度を持つ集合を可算集合または可付番集合という。
連続体の濃度: 実数全体の集合$\mathbb{R}$の濃度を連続体の濃度という。実数全体の集合$\mathbb{R}$は自然数全体の集合$\mathbb{N}$と全単射同型でない。

連続体 ＞ 可付番集合
カントールが対角線論法により証明した。

自然数の偶数全体の集合と自然数の集合$\mathbb{N}$とどちらが濃度が大きいか？
自然数の偶数全体の集合を$\{n | n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$とすれば自然数と全単射同型になる。

自然数の偶数全体の集合 ⊂ 自然数全体の集合

$$|\text{自然数の偶数全体の集合}| = |\text{自然数全体の集合}|$$

集合A, Bが有限集合ならば

$$A \subset B \Longrightarrow |A| < |B|$$