情報数学 I

第 4 回「関係-同値関係と同値類」

§2.1.4 同値関係

〇同値関係と分割

同値関係（equivalence relation）：集合S上の関係Rが反射的かつ対称的かつ推移的であるとき、この関係Rを同値関係という。

分割(partition)、細胞（cells）：集合Sの重複しない空でない部分集合S_iの細分を集合Sの分割といい、この部分集合S_iを細胞という。

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n, \qquad S_i \cap S_j = \phi \; (i \neq j)$$

同値類、商：関係Rを集合S上の同値関係とする。$a \in S$に対し、aと同値関係にある要素の集合を、「aのRによる同値類」といい、C_aまたは$[a]$で表す。aは同値類C_aの代表元という。

$$C_a = \{x | xRa, x \in S, a \in S\}$$

また、Sの同値類の集合を同値関係Rによる集合Sの商といい、S/Rで表す。

$$S/R = \{C_a | a \in S\}$$

『集合Sを同値関係Rによって同値類に分割する』

例）$A = \{a, b, c, d, e, f\}$,A上の関係$R = \{(a,a),(a,c),(a,f),(b,b),(c,a),(c,c),(c,f),$
$(d,d),(d,e),(e,d),(e,e),(f,a),(f,c),(f,f)\}$

同値類

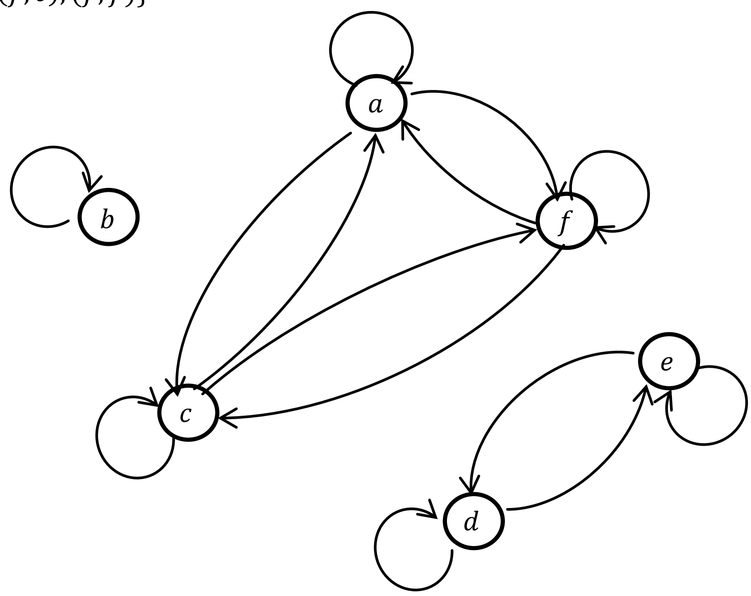
$C_a = \{a, c, f\}$

$C_b = \{b\}$

$C_d = \{d, e\}$

RによるAの商

$A/R = \{C_a, C_b, C_d\}$



例）$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上の 2 項関係~を

$$(a,b)\sim(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a+d=b+c$$

と定義する。関係~は同値関係となることを示し、この同値関係~による集合$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$の商$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$を求めよ。

解）$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上の関係~が反射的かつ対称的かつ推移的であることを示せばよい。$a,b,c,d,e,f\in\mathbb{N}$を任意の元とする。

(1) 関係~が反射的であるかどうかは$(a,b)\sim(a,b)$が成り立つかどうか確かめればよい。$a+b=b+a$であるから、$(a,b)\sim(a,b)$が常に成り立つ。よって、関係~は反射的である。
(2) $(a,b)\sim(c,d)$が成り立っているとする。そうすると、$a+d=b+c$が成り立ち、$c+b=d+a$が成り立つ。ゆえに$(c,d)\sim(a,b)$が成り立つ。よって、関係~は対称的である。
(3) $(a,b)\sim(c,d)$と$(c,d)\sim(e,f)$が成り立っているとする。すると、$a+d=b+c$と$c+f=d+e$が成り立ち、$a+d+c+f=b+c+d+e$が成り立つ。両辺を整理すると、$a+f=b+e$となり、したがって、$(a,b)\sim(e,f)$が成り立つ。よって、関係~は推移的である。
よって、(1), (2), (3)より、関係~は同値関係である。

任意の$a\in\mathbb{N}(a\geq 2)$に対し、$(a,1)$と関係~にある同値類$C_{(a,1)}$は

$$C_{(a,1)}=\{(a+x,1+x)|x\in\mathbb{Z},x\geq 0\}$$

となる。$(1,1)$と関係~にある同値類$C_{(1,1)}$は

$$C_{(1,1)}=\{(x,x)|x\in\mathbb{N}\}$$

となる。任意の$a\in\mathbb{N}(a\geq 2)$に対し、$(1,a)$と関係~にある同値類$C_{(1,a)}$は

$$C_{(1,a)}=\{(1+x,a+x)|x\in\mathbb{Z},x\geq 0\}$$

となる。

$C_i\cap C_j=\phi\ (i\neq j)$であり、$\cdots\cup C_{(1,4)}\cup C_{(1,3)}\cup C_{(1,2)}\cup C_{(1,1)}\cup C_{(2,1)}\cup C_{(3,1)}\cup C_{(4,1)}\cup\cdots=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$であるから、$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim=\{\cdots,C_{(1,4)},C_{(1,3)},C_{(1,2)},C_{(1,1)},C_{(2,1)},C_{(3,1)},C_{(4,1)},\cdots\}$である。

解説）自然数の対を次の表のように表現すると、斜めの成分が同値類となる（同色の部分が同値類）

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1.4)	…
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2.4)	…
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	…
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	…
…	…	…	…	…

表でみると、同値類に重なりがなく、同値類をすべて集めることで$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$をすべて覆うこと

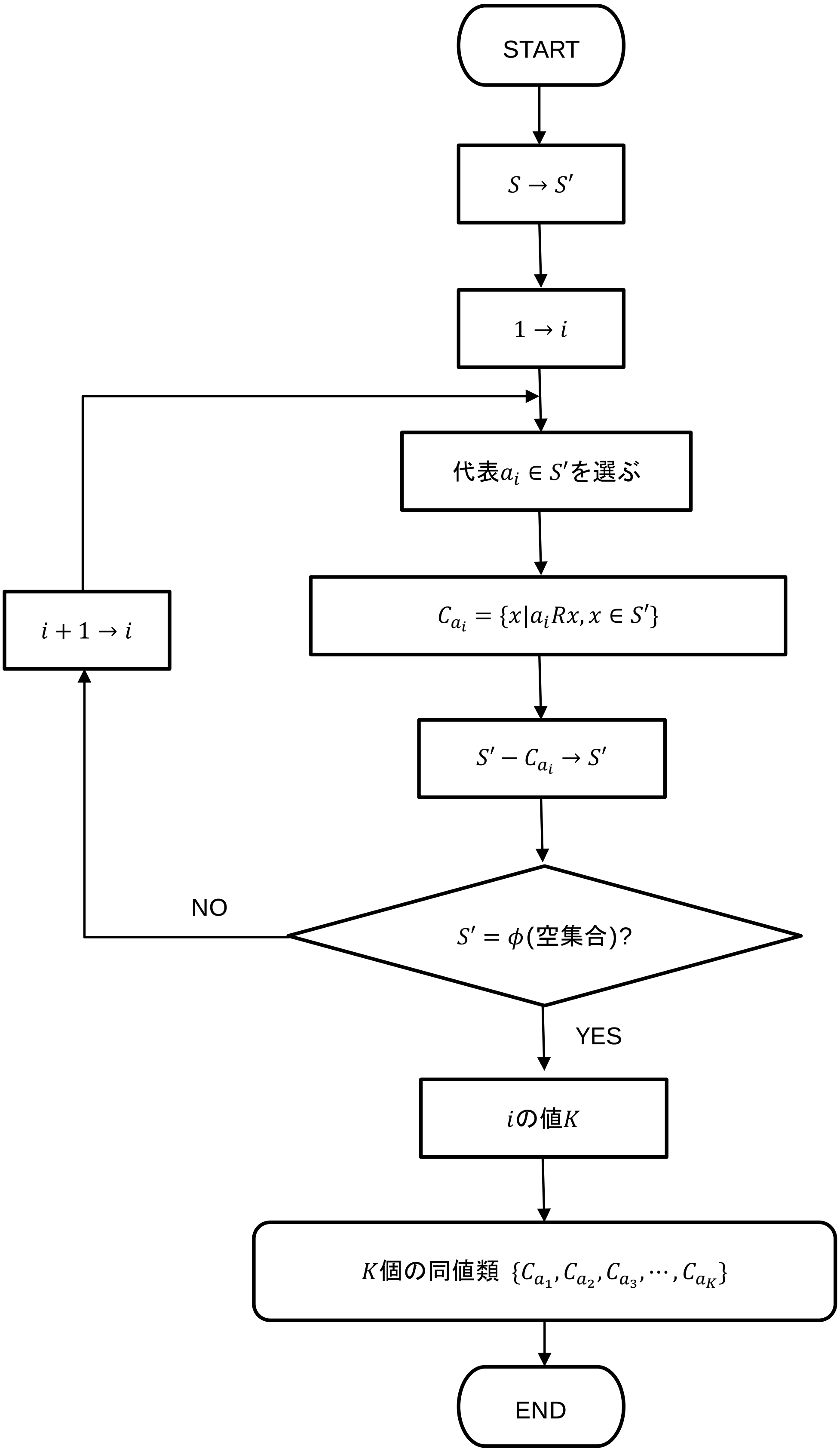
がわかる。これは自然数を用いた整数の定義になっていて、$(1,1)$の同値類は整数の0を表し、$(2,1)$の同値類は整数の1、$(3,1)$の同値類は整数の2、というふうに正の整数を表している。$(1,2)$の同値類は整数の-1、$(1,3)$の同値類は整数の-2、というふうに負の整数を表している。つまり、対(a,b)は$a-b$の整数を表していることになる。

〇同値関係の性質

Rを集合S上の同値関係としたとき、次の定理が成り立つ。

[定理 1] $\forall a \in S$ に対して、$a \in C_a$が成り立つ。
[定理 2] $\forall a,x,y \in S$に対し、$x,y \in C_a \Longrightarrow xRy$が成り立つ。
[定理 3] $\forall a,b \in S$ に対し、$aRb \Longrightarrow C_a = C_b$が成り立つ。
[定理 4] S/RはSの分割である。

付録：同値関係Rによる集合Sの分割法のフローチャート



付録：同値関係の性質の証明

関係Rは、同値関係であるから、反射的かつ対称的かつ推移的である。そこで、$\forall a,b,c \in S$に対して、$aRa, aRb \Longrightarrow bRa, aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$ が成り立つことを用いて、証明すればよい。

[定理 1] $\forall a \in S$ に対して、$a \in C_a$が成り立つ。
(定理 1 の証明) $\forall a \in S$に対してRは反射的であるからaRaである。従って、$a \in C_a$が成り立つ。(なぜならば $C_a = \{b|aRb, a \in S, b \in S\}$)

[定理 2] $\forall a,x,y \in S$に対し、$x,y \in C_a \Longrightarrow xRy$が成り立つ。
(定理 2 の証明) $\forall x,y \in S$に対し$x \in C_a$と$y \in C_a$が成り立つとすると、xRaとyRaが成り立つ。対称律と推移律より、$xRa \wedge aRy \Longrightarrow xRy$であるため、$xRy$が成り立つ。

[定理 3] $\forall a,b \in S$ に対し、$aRb \Longrightarrow C_a = C_b$が成り立つ。
(定理 3 の証明) いま、aRbが成り立つとする。Rは対称的であるからbRaが成り立つ。$c \in C_a$であるならばaはcと同値関係にあるからaRcが成り立つ。Rは推移的であるから、$bRa \wedge aRc \Longrightarrow bRc$が成り立つ。よって、$c \in C_b$となる。すなわち、$c \in C_a$ならば$c \in C_b$が成り立つ。従って、$aRb$が成り立つならば、$C_a \subseteq C_b \cdots (A)$が成り立つ。一方、$c \in C_b$であるならば$b$は$c$と同値関係にあるから、$bRc$が成り立つ。$R$は推移的であるから、$aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$が成り立つ。よって、$c \in C_a$となる。すなわち、$c \in C_b$ならば$c \in C_a$が成り立つ。従って、$aRb$が成り立つならば、$C_b \subseteq C_a \cdots (B)$が成り立つ。$(A),(B)$より、$aRb$が成り立つならば$C_a = C_b$が成り立つ。

[定理 4] S/RはSの分割である。
(定理 4 の証明) S/RがSの分割であることを示すには、次の(1)～(2)が成り立つことを示せばよい。
(1) Sの全ての要素を$a_1, a_2, \cdots, a_n$としたとき、$C_{a_1} \cup C_{a_2} \cup \cdots \cup C_{a_n} = S$が成り立つ。
(2) $\forall a,b \in S$ に対し、$C_a = C_b$もしくは$C_a \cap C_b = \phi$が成り立つ。
(1)の証明：定理 1 より、$\forall a \in S$ に対して、$a \in C_a$が成り立つ。同値類の要素もSの要素であるから、$C_{a_1} \cup C_{a_2} \cup \cdots \cup C_{a_n} = S$が成り立つ。
(2)の証明：$C_a \cap C_b \neq \phi$とするならば$C_a \cap C_b$の要素cが存在する。従って、その要素cは$c \in C_a$であるので、aRcが成り立つ。また、$c \in C_b$であるので、bRcが成り立つ。一方、Rは対称的であるので、$bRc \Longrightarrow cRb$が成り立つ。Rは推移的であるので、$aRc \wedge cRb \Longrightarrow aRb$が成り立つ。従って、定理 3 より$C_a = C_b$が成り立つ。すなわち、$C_a \cap C_b \neq \phi$であるならば、$C_a = C_b$が成り立つ。