情報数学 I

第 3 回「関係」

§2.1 関係 (relation)

§2.1.1 直積集合

n-項組 (n-tuple): n組の要素$a_1, a_2, \cdots, a_n$を順序に意味を持たせて並べたものをサイズがnの系列またはn-項組といい、$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$で表される

[定義] 等しいn-項組(等しい系列)

二つのn-項組$(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$に対し、$a_i = b_i (i = 1,2, \cdots, n)$であるとき、この二つの$n$-項組は等しいという。$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$と書く。

直積集合 (cartesian product): A, Bを集合とするとき、$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$を集合$A$と集合$B$の直積集合という。この要素は順序対で表される。

n個の集合の直積集合は

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1,2, \cdots, n\}$$

この集合の要素はサイズがnの系列である

(例) $A = \{0,1\}$ $B = \{a, b, c\}$の直積集合$A \times B$と$B \times A$を求めよ

解) $A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$

$B \times A = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

一般に$A \times B \neq B \times A$

§2.1.2 関係

工学部の学生の集合をSとする。$a, b \in S$に対して、“aはbと同県人である”という関係Rを考える。aはbと同県人であるか、または、aはbと同県人ではない、のどちらかである。

関係は、「aはbと～関係にある」かまたは「aはbと～関係にない」のどちらかである

『関係は考えている集合の二つの要素間にある結びつきがあるかないかを考えている』

関係：A, Bを集合とする。$A \times B$の任意の部分集合$R \subseteq A \times B$をAからBへの関係という。特に$A = B$であるとき集合A上の関係という。

$R \subseteq A \times B$を関係とするとき、$x \in A, y \in B$に対して、$(x, y) \in R$を“xはyと関係Rにある”といい、xRyで表す。

$(x, y) \notin R$を“xはyと関係Rにない”といい、$x \not R\, y$で表す。

(例) 整数の集合$A = \{15,4,9\}$ $B = \{5,2\}$とする。集合Aから集合Bへの関係Rを“aはbの倍数である”とするとき、Rと $\not R$ を求めよ。

(解) $A \times B = \{(15,5), (15,2), (4,5), (4,2), (9,5), (9,2)\}$

$$R = \{(15,5), (4,2)\}$$
$$\not R = \{(15,2), (4,5), (9,5), (9,2)\}$$
$$R \cup \not R = A \times B$$

『この関係Rを定義すると、2 つの集合間あるいは 1 つの集合に構造を与えることとなる』
⇒関係データベース

逆関係：“aはbと関係Rにある”が真であるとき、“bはaと関係R^{-1}にある”が真となる。R^{-1}を関係Rの逆関係という。

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R, a \in A, b \in B\}$$

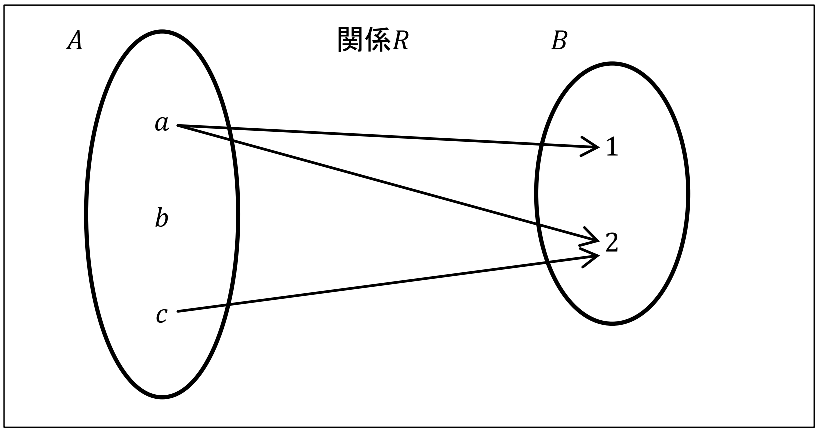
(例)
“aはbの倍数である”という関係Rの逆関係R^{-1}を求めよ
(解) “bはaの約数である”が逆関係である

§2.1.3 関係の表現

① 関係グラフ

集合間で関係のある要素を矢印で結んだグラフ

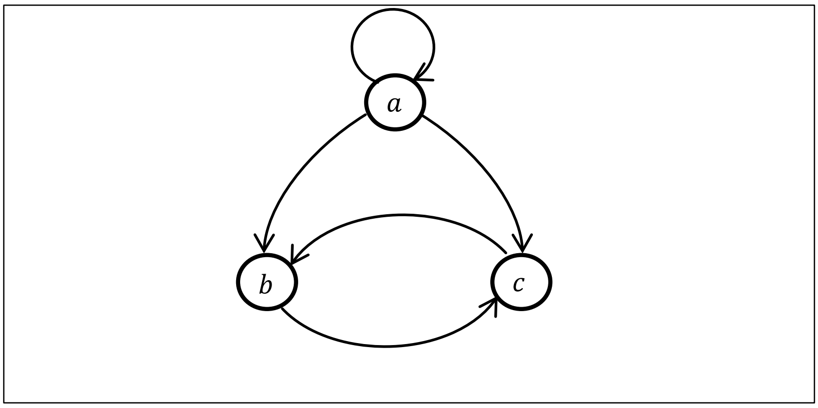
例) $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}, R=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$



② 有向グラフ

集合内の要素の関係を表現するグラフ

例) $A=\{a,b,c\}, R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$



③ 関係行列

$A=\{a_1,\cdots,a_m\}, B=\{b_1,\cdots,b_n\}$，関係$R\subseteq A\times B$に対し、$(i,j)$ 成分が $r_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$

で定義されたm行n列の行列

$$M_R=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix}$$

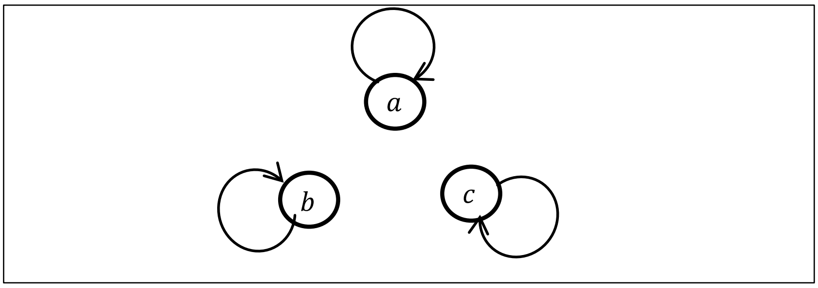
例) $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}, R=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

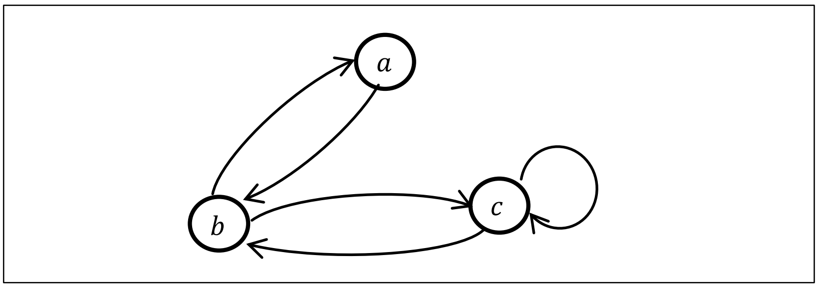
§2.1.4 同値関係

〇集合A上の関係Rの特別な性質

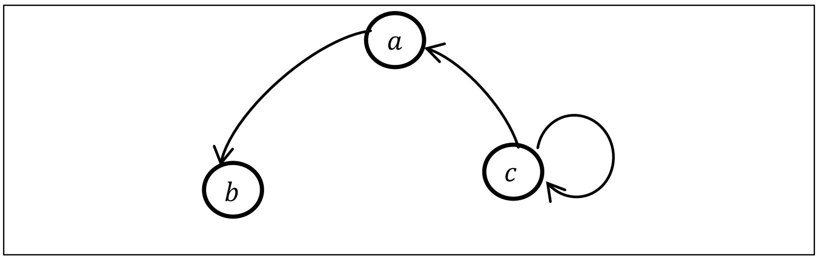
(1) $\forall a \in A$に対し、aRaが真であるとき、関係Rは反射的である、という。(反射律)



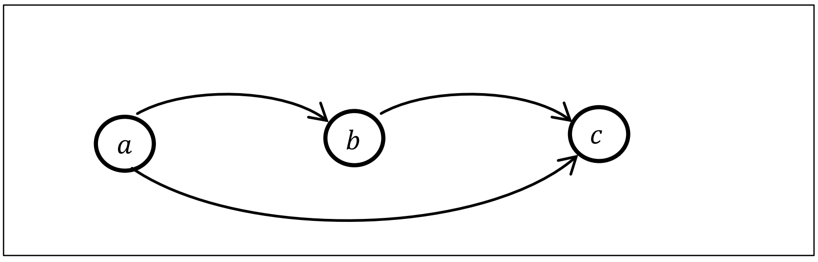
(2) $\forall a, b \in A$に対し、$aRb \Longrightarrow bRa$が真であるとき、関係Rは対称的である、という。(対称律)



(3) $\forall a, b \in A$に対し、$aRb \wedge bRa \Longrightarrow a = b$が真であるとき、関係$R$は反対称的である、という。(反対称律)



(4) $\forall a, b, c \in A$に対し、$aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$が真であるとき、関係$R$は推移的である、という。(推移律)



(例)

①人間の集合T上の“友人である”という関係Rの性質を調べよ。

②人間の集合T上の“親子である”という関係Rの性質を調べよ。

③工学部の学生の集合S上の“同学科の学生である”という関係 R の性質を調べよ。

④集合の包含関係の性質を調べよ。

⑤集合の等号関係の性質を調べよ。

関係	反射的	対称的	反対称的	推移的
友人関係	〇	〇	×	×
親子関係	×	〇	×	×
同学科の学生	〇	〇	×	〇
包含関係 ⊆	〇	×	〇	〇
等号関係 =	〇	〇	〇	〇