情報数学 I

第 2 回「集合、集合の演算」

§1.1 集合 (set)

集合、要素あるいは元: 人類のみんなが同じと認めるある共通した特徴によって統一できる対象の集まりを集合といい、その対象を要素あるいは元という

(例)

偉大な数学者の集合…数学の集合ではない

フィールズ賞を受賞した数学者の集合…数学の集合である

○集合を定義する方法

①集合の要素を全て列挙する（外延的記法、枚挙法）

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

(注) 集合の括弧は{ }を使用する

(注) 集合の並び順には意味はない

(注) 集合の要素は重複してはいけない。重複を許す集まりは多重集合と呼ばれる。

集合 vs 系列

系列 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$: 要素を並べた並びのことを系列または列という。$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$と書いたり、$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$とも書く。系列の括弧は( )または[ ]を使用する。系列では同じ要素が何度でてもかまわない。

系列は、要素の順序に意味をもたせている

集合は要素の順序に意味を持たせていない

すなわち、$ab \neq ba$であり、$(a, b) \neq (b, a)$ であり $\{a, b\} = \{b, a\}$ である。

② 述語$P(x)$ を満たすxの集合（内包的記法）

$\{x | P(x)\}$

↑such that の意味

$\{x | P(x), F(x)\}$ 述語$P(x)$を満たしかつ述語$F(x)$を満たすxの集合

(注) カンマ，は「かつ(∧)」と同じ意味である。

(例) 要素が 0,1,2,3 である集合

① $\{0,1,2,3\}$

② $\{x | x \in \mathbb{Z}\,(\text{整数の集合}), 0 \leq x \leq 3\}$

③ 全体集合(universal set)と空集合 (empty set)

対象としているもの全体を全体集合といい、Uで表す。要素のない集合を空集合といい、ϕ (ギリシャ文字のファイ)で表す。

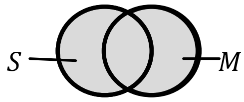
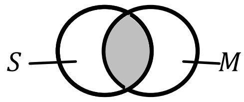
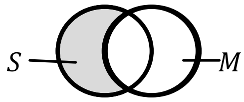
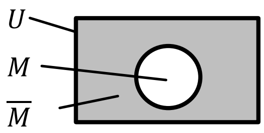
〇数の集合を表す記号

$\mathbb{N}$ (自然数全体の集合), $\mathbb{Z}$ (整数全体の集合), $\mathbb{Q}$ (有理数全体の集合),
$\mathbb{R}$ (実数全体の集合), $\mathbb{C}$ (複素数全体の集合)

〇集合の要素、集合の比較

	記法	集合の定義	意味
集合の要素	$a \in S$		aは集合Sに属する
	$a \notin S$		aは集合Sに属さない
部分集合	$S \subseteq M$ $S \subset M$ (真部分集合)	$\forall x\ [x \in S\ \Rightarrow x \in M]$	集合Sは集合Mの部分集合である
等しい集合	$S = M$	$S \subseteq M\ \wedge M \subseteq S$	集合Sは集合Mと等しい
比較可能な集合		$S \subseteq M\ \vee M \subseteq S$ (SとMのどちらかが部分集合)	集合SとMは比較可能である
比較可能でない集合		$S \nsubseteq M\ \wedge M \nsubseteq S$ (SとMはどちらとも部分集合になっていない)	集合SとMは比較可能でない

〇集合の演算

集合の演算	記法	集合の定義	ベン図
和集合	$S \cup M$	$\{x \mid x \in S \vee x \in M\}$	
積集合	$S \cap M$	$\{x \mid x \in S, x \in M\}$	
差集合	$S - M$	$\{x \mid x \in S, x \notin M\}$	
集合Mの補集合 Complement	$\overline{M}$ (またはM^c)	$\overline{M} = U - M$ $\{x \mid x \in U, x \notin M\}$ U: 全体集合	

(注) 論理和$X \vee Y$と和集合$S \cup M$は異なる。論理積$X \wedge Y$と積集合$S \cap M$は異なる

〇集合の性質

(1) ベキ等律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(2) 結合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 交換律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(4) 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(5) 恒等律

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$

(6) 補集合律

$$A \cup \bar{A} = U$$
$$A \cap \bar{A} = \phi$$
$$\bar{\bar{A}} = A \qquad \because \bar{\bar{A}} = \overline{U - A} = U - (U - A) = A$$
$$\bar{U} = \phi$$
$$\bar{\phi} = U$$

(7) ド・モルガン律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(8) 吸収律

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

〇要素の個数

有限集合Aの要素の個数を記号$n(A)$(または$|A|$、$\#A$)で表す

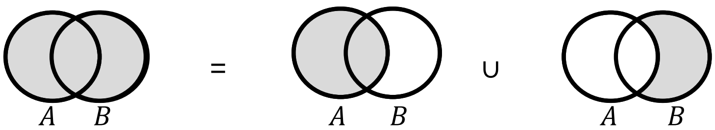
(例)アラビア数字の集合$A = \{0,1,2,\cdots,9\}$ に対し、$n(A) = 10$

[定理]

A, Bを有限集合とする。

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$が成り立つ。

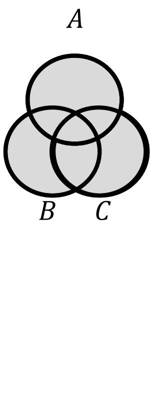
(説明)



[定理]

A, B, Cを有限集合とする。

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ が 成り立つ



(説明)

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A\cup B)+n(C)-n\big((A\cup B)\cap C\big) \\ &= n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big) \\ &= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

〇自然数とペアノの公理と数学的帰納法

自然数の帰納的構成的定義: 自然数の全体集合 $\mathbb{N}$ は次のように帰納的に構成することができる。

(i) $1\in\mathbb{N}$　(1は自然数である)

(ii) $k\in\mathbb{N}\Rightarrow k+1\in\mathbb{N}$　(ある自然数kの次の数$k+1$も自然数である)

(注) 正確な自然数の定義はペアノの公理によって与えられる。

ペアノの公理: 自然数全体の集合$\mathbb{N}$の定義。次の 5 つの性質を全てもつ集合$\mathbb{N}$の要素を自然数という。

(1) $\mathbb{N}$は出発元1を含んでいる。

(2) $\mathbb{N}$の任意の元xに対し、次の元と呼ばれる$\varphi(x)$がただ 1 つ$\mathbb{N}$に存在する。

(3) 1はどの元の次の元にもならない。

(4) 次の元が同じなら、もとの元も同じである。

(5) $\mathbb{N}$ の部分集合 Sが次の性質を満たすとき、$S=\mathbb{N}$ である。

(i) $1\in S$

(ii) $k\in S\Rightarrow\varphi(k)\in S$

つまり、$1\in\mathbb{N}$であり、$k\in\mathbb{N}\Rightarrow\varphi(k)\in\mathbb{N}$であり、自然数同士には重複がなく、かつ、これらの条件を満たす最小の集合が自然数全体の集合である、ということである。また、自然数は 1 から順に次のように与えられる。

$$1,\quad \varphi(1),\quad \varphi(\varphi(1)),\quad \varphi(\varphi(\varphi(1))),\quad \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(1)))),\quad \cdots$$

1が自然数の1、$\varphi(1)$が自然数の 2、$\varphi(\varphi(1))$が自然数の 3、$\varphi(\varphi(\varphi(1)))$が自然数の 4、$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(1))))$が自然数の 5 に対応する。

数学的帰納法: $P(n)$を自然数nに関する命題とする。もし、次の$(i),(ii)$が成立するなら、$\forall n\in\mathbb{N}$に対して$P(n)=\mathrm{T}$である。

(i) $P(1)=\mathrm{T}$

(ii) $k\in\mathbb{N}, P(k)=\mathrm{T}\ \Rightarrow P(k+1)=\mathrm{T}$

数学的帰納法はペアノの公理(5)に基礎を置く証明法である。$S = \{n | P(n) = \mathrm{T}, n \in \mathbb{N}\}$とおき、数学的帰納法の証明ができたのならば、$S = \mathbb{N}$となり、全ての自然数において成り立つことになる。