情報数学 I

第 13 回「いろいろなグラフ 2：オイラーグラフ、ハミルトングラフ、彩色問題」

§5.2.2 オイラーグラフとハミルトングラフ

〇オイラーグラフ

周遊小道：各辺を一度ずつ通る小道

オイラー小道：閉じた周遊小道

オイラーグラフ：オイラー小道を持つグラフ

すべての辺を通る一筆書きができるかどうか、という問題。

(オイラーの定理)　連結グラフGに対し、次が成り立つ。(これは必要十分条件)

周遊小道を持つ ⇔ 奇頂点が 0 か 2

オイラー小道を持つ ⇔ 奇頂点が 0

(オイラー小道に関する証明)

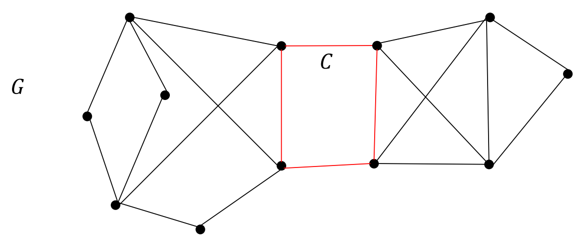
(⇒) オイラー小道であれば各頂点には、入る辺と出る辺を同数持つため必ず偶頂点となる。

(⇐) $G=(V,E)$としたとき、$q=|E|$に関する数学的帰納法で証明。

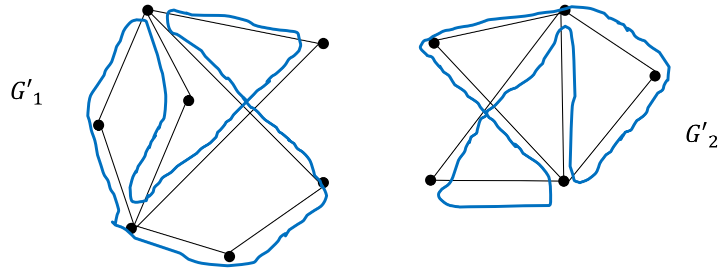
$q \leq 2$のときは明らかに成り立つ。

$q > 2$のとき、$q-1$以下では成り立っているとする。グラフGの任意の点Pを一つ選択する。

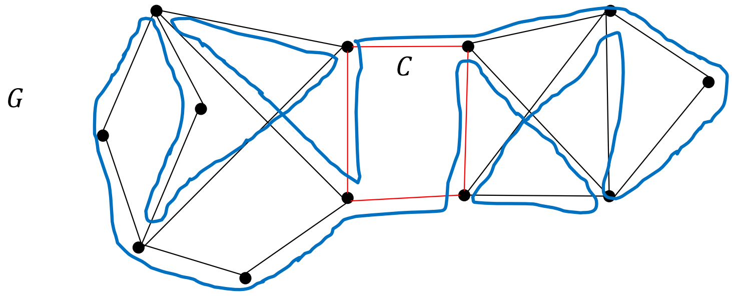
Pを始点とする任意の閉路Cをつくる。



GからCを構成する辺を取り除いてできるグラフG'はすべて偶頂点であり、かつ、$q-1$以下のサイズとなるため、G'はすべてオイラー小道を持つ。



各G'とCは共有する頂点を持つため、Cを辿るときにその共有する頂点からG'を辿ってCに戻ってくればCもG'も一度ずつ辿ることができる。



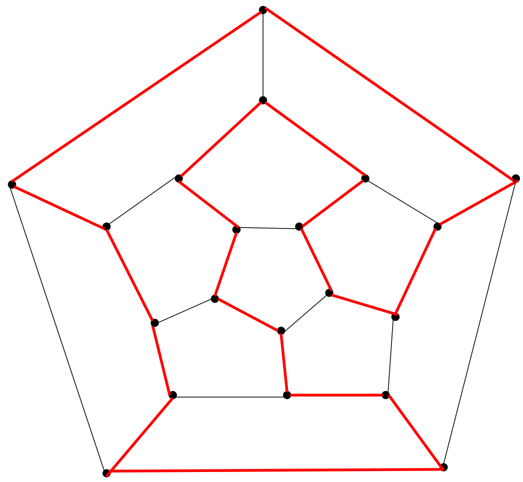
したがって、qに対するオイラー小道を作ることができる。よって、数学的帰納法より、題意を示せた。 □

○ハミルトングラフ

ハミルトン閉路: 各頂点を一度ずつ通る閉じた小道

ハミルトングラフ: ハミルトン閉路を持つグラフ

(例) 正 12 面体とそのハミルトン閉路

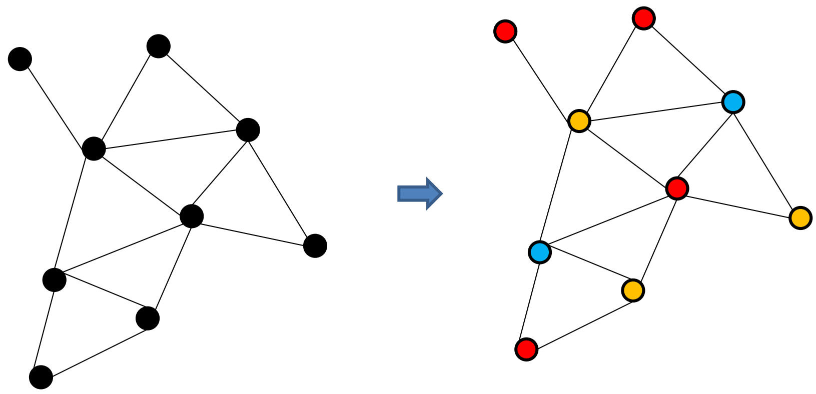


必要十分条件は未解決問題

(オアの定理) 頂点数pが$p \geq 3$となるグラフGに対し、隣接しない任意の 2 頂点$P, Q\ (P \neq Q)$に対し、$d(P) + d(Q) \geq p$が成り立つ⇒ Gはハミルトングラフ

(例)
任意の正整数nについて$K(n, 2n, 3n)$はハミルトングラフ
頂点数pに対し、$p \geq 3$, (Gの最小次数) $\geq p/2$ならハミルトングラフ

§5.2.3 グラフの彩色
〇頂点彩色
頂点彩色: 隣接するどの 2 点も異なる色になるようにグラフの頂点に色づけをすること。
n-頂点彩色可能: グラフ G が n 色で頂点彩色できるとき、n-頂点彩色可能という。グラフ G の最小の頂点彩色数を $\chi_V(G)$ で表す。



このグラフは3色あれば
塗り分けられる

なるべく少ない色数で
塗り分けられると良い

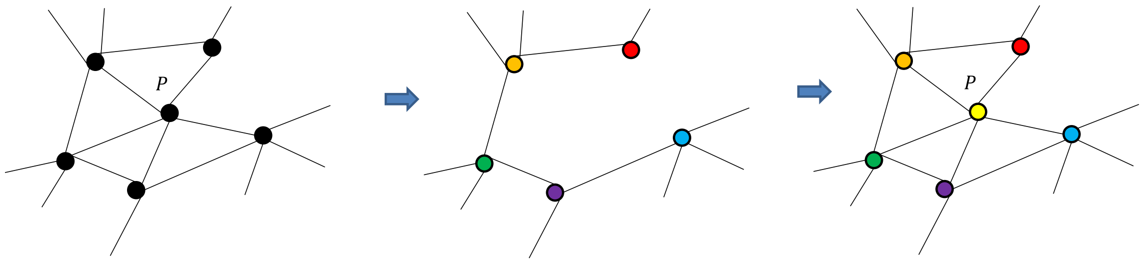
(定理) 単純平面グラフ G が 2-頂点彩色可能なのは、G が 2 部グラフのときに限る。

(6 色定理) 単純平面グラフはすべて 6-頂点彩色可能である。

(補題) 平面グラフには次数 5 以下の頂点が存在する。
(補題の証明) 平面グラフの頂点数を p、辺数を q とする。全ての頂点が 6 以上の次数であると仮定すると、$6p \leq 2q$。よって、$3p \leq q$ が成り立つ。平面グラフの性質より、$q \leq 3p - 6$ が成り立つため、$3p \leq q \leq 3p - 6$ が成り立つことになるが、これは明らかに矛盾している。よって、平面グラフには次数 5 以下の頂点が存在する。

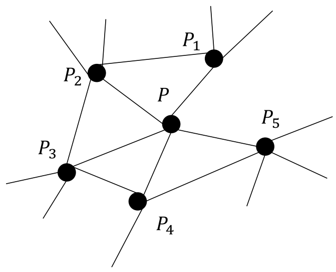
(6 色定理の証明) 頂点数に関する数学的帰納法で証明する。頂点数 6 以下のグラフは明らかになり立つ。頂点数 $n-1$ の任意のグラフで 6 色定理が成り立つとする。今、頂点数 n の任意のグラフ G が与えられたとき、補題より、その中に次数 5 以下の頂点 P が必ず存在する。G から頂点 P を削除したグラフは頂点数 $n-1$ となるので、仮定より、必ず 6 色で塗り

分けることができる。P の色をその隣接する頂点の色と異なる色を割り当てることにより、G を 6 色で塗り分けることができる。よって、数学的帰納法より 6 色定理が成り立つ。

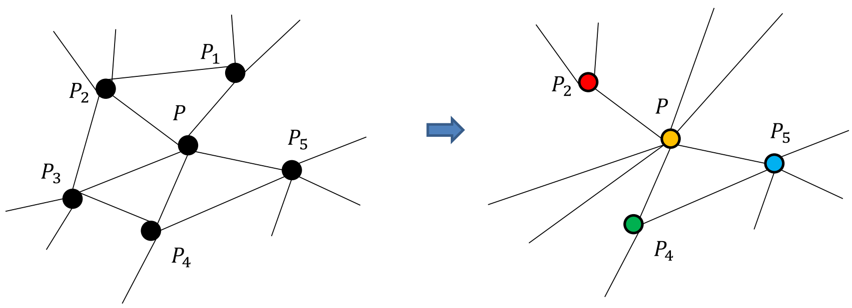


(5 色定理) 単純平面グラフはすべて 5-頂点彩色可能である。

(5 色定理の証明) 頂点数に関する数学的帰納法で証明する。頂点数 5 以下のグラフは明らかになり立つ。$n-1$ の頂点数で 5 色定理が成り立つとする。今、頂点数 n の任意のグラフ G が与えられたとき、補題より、その中に次数 5 以下の頂点 P が必ず存在する。P の次数が 4 以下ならば、P に隣接する頂点と異なる色を割り当てれば良い。従って、P の次数が 5 のときにどのように色を割り当てれば良いかということが問題となる。今、次数 5 の P の周りの頂点を次のように P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。

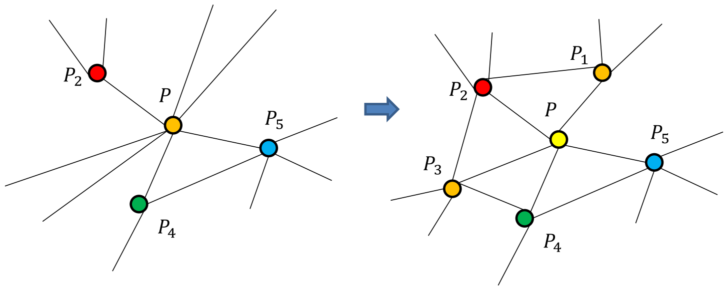


P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の間に全て辺が接続されていると、それは非平面グラフである K_5 になるが、G は平面グラフであるためそれはありえない。従って P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 の中にお互い隣接していない頂点が必ず二つ以上存在する。その頂点を例えば、P_1, P_3 とする。このとき、辺 PP_1 と辺 PP_3 をそれぞれ縮約(二つの頂点を一つにまとめる)して、新しい平面グラフ G'を得る。



この G'には高々 $n-1$ の頂点しか含まれないので、5-頂点彩色可能である。次に 2 本の辺

を元に戻す。ただし、P に割り当てられた色で P_1, P_3 の両方を彩色する。今、P に隣接する頂点には高々4 色しか使われていないので残った 1 色で P を彩色すれば、G の 5-頂点彩色が得られる。



よって数学的帰納法より、題意を示した。 □

(4 色定理) 単純平面グラフはすべて 4-頂点彩色可能である。証明は難しいが、1977 年に appel と haken により解決された。

(Welsh-Powell の頂点彩色アルゴリズム)

step1. 頂点を次数の大きい順に並び替え、$P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする。

step2. c を新しい色とする。

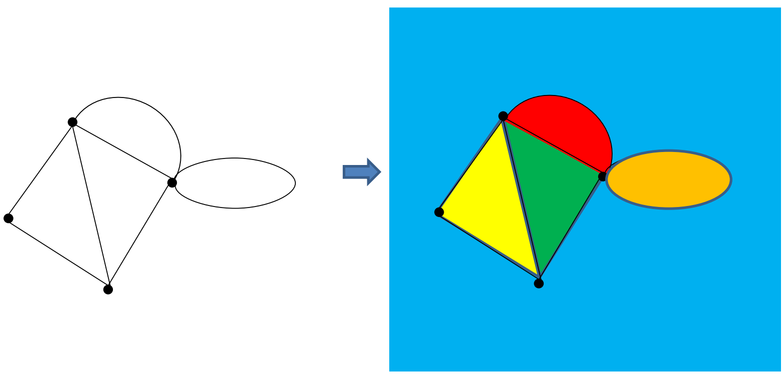
step3. $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の順に色 c を可能な限り割り当てる。(色 c の頂点が隣接しない限りその頂点に色 c を割り当てる)

step4. 全ての頂点に色を割り当てていたら終了。そうでなければ c を新しい色にして step3 に戻る

〇地図の彩色

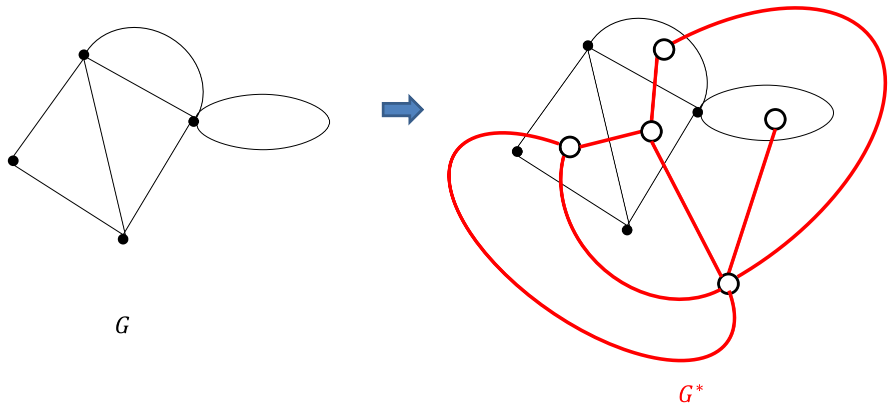
地図: 橋のない連結平面グラフを地図という。

k-領域彩色可能: 地図 G の隣接する 2 つの領域が同じ色にならないように k 色で領域を彩色できるとき、G は k-領域彩色可能という。グラフ G の最小の領域彩色数を $\chi_R(G)$ で表す。

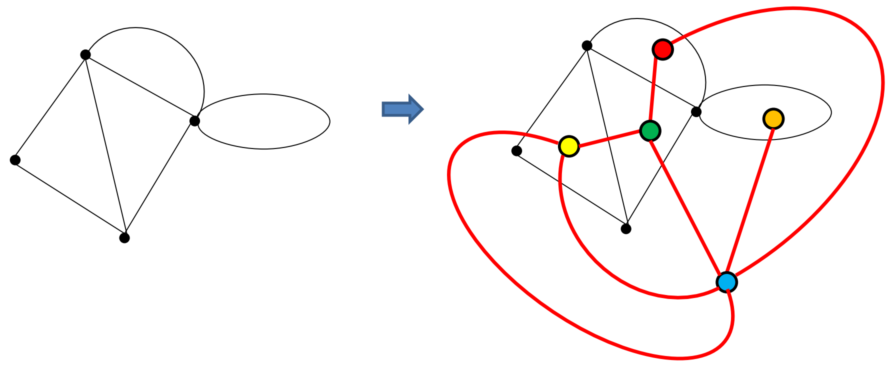


双対グラフ: グラフ G から次の手続きにより得られるグラフ G^* を G の双対グラフという。
step 1. G の各領域 r_i (無限領域も含む)に点 P_i^* をとり、G^* の点とする。
step 2. G の各辺 e_i に対し、e_i を境界にもつ 2 つの領域にとった点を e_i と 1 点で交差するように結び e_i^* とし、G^* の辺とする。

(例)



(定理) G を地図とし、G^* を G の双対グラフとする。G が k-領域彩色可能であることの必要十分条件は G^* が k-頂点彩色可能であることである。



(定理) 地図は 4-領域彩色可能である。