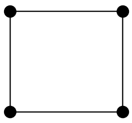
情報数学Ⅰ

第 12 回「いろいろなグラフ 1：完全グラフ、n部グラフ、木グラフ、平面グラフ」

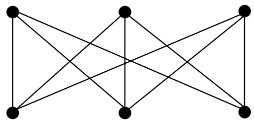
§5.1.3 いろいろなグラフ

〇完全グラフと正則グラフ

n次の正則グラフ：各頂点の次数が等しいグラフを正則グラフという。次数nの正則グラフをn次の正則グラフまたはn-正則グラフという。最小次数 = 最大次数 = n。

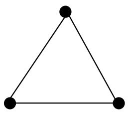


2次の正則グラフ

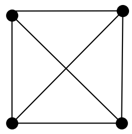


3次の正則グラフ

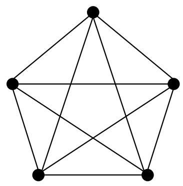
完全グラフ：どの 2 頂点も隣接しているグラフ。n頂点の完全グラフをK_nと表す。



K_3



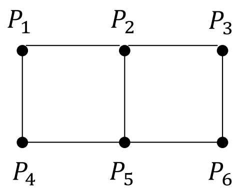
K_4



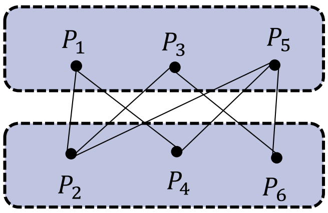
K_5

〇n部グラフ

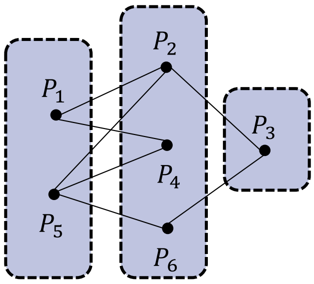
n部グラフ：$G = (V, E)$において、頂点集合をn個に分割でき（$V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, $V_i \cap V_j = \phi\ (i \neq j)$, $V_i \neq \phi$）、両端点が同じV_iの要素であるような辺が存在しないならば、Gはn部グラフと呼ばれる。



G

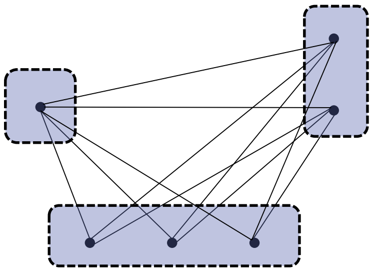


G（2部グラフ）



G（3部グラフ）

完全n部グラフ：n部グラフGにおいて、任意の$i \neq j$に対して、V_iのどの頂点とV_jのどの頂点も隣接しているとき、Gは完全n部グラフと呼ばれる。$|V_i| = p_i$であるとき、このグラフを$K(p_1, \cdots, p_n)$もしくは$K_{p_1,\cdots,p_n}$と表す。



$K(1,2,3)$

〇木グラフ

木グラフ：連結な無閉路グラフ

（定理）Gを頂点数p、辺数qのグラフとする。次の(1)～(6)は同値である。

(1) Gは木グラフである。

(2) Gのどの 2 頂点間にも道がちょうど 1 つだけ存在する。

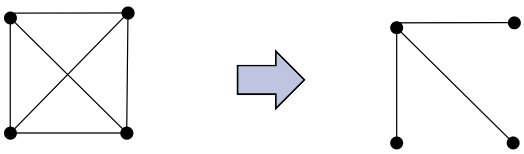
(3) Gは連結で、Gのどの辺も橋である。

(4) Gには閉路がなく、Gの隣接しない 2 頂点間のどこに辺を付け加えても閉路ができる。

(5) Gは連結で、$p = q + 1$である。

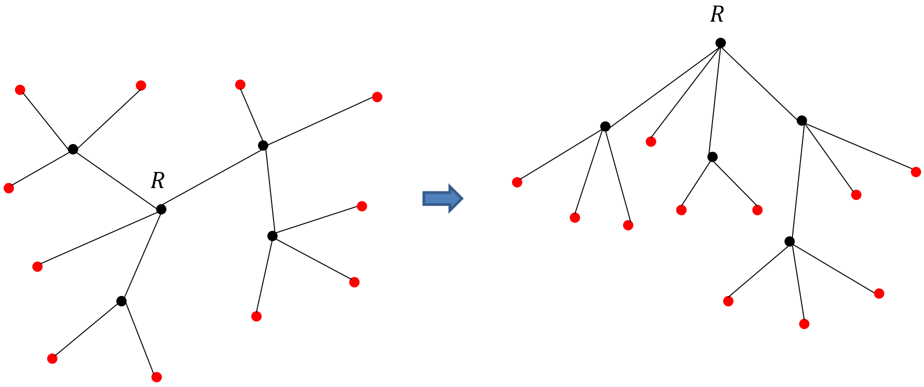
(6) Gには閉路がなく、$p = q + 1$である。

全域木：グラフGの部分グラフTがGのすべての頂点を含む木グラフであるとき、TをGの全域木という。



K_4

根付き木：特別な頂点が一つ定められている木グラフを根付き木といい、特別な頂点を根という。根以外の次数 1 の頂点を葉という。辺のことは枝ともいう。根からの道の長さを深さという。



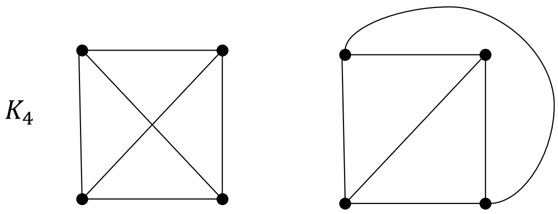
木グラフは、根(R)をつまんでもちあげた図で書くことが多い。赤い頂点は葉。

§5.2 平面的グラフ

§5.2.1 平面的グラフ

平面グラフ: 辺が交わらないグラフ

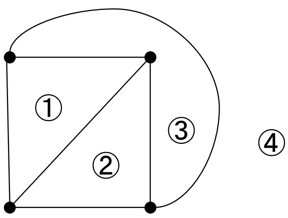
平面的グラフ: 平面グラフと同型なグラフ。頂点と辺をうまく配置することによって辺が交わらなくなる。



平面グラフ

K_4は平面的グラフ

領域: 平面グラフは辺によって囲まれたいくつかの領域に分けられる。

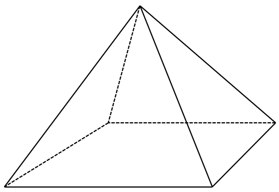


①②③④は平面グラフK_4の領域

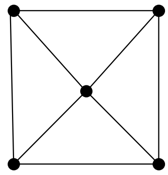
（オイラーの公式）任意の連結な平面グラフGに対して$p-q+r=2$が成り立つ。ただし、p,q,rはそれぞれGの頂点数、辺の本数、領域の個数である。

（例）K_4の場合、$p=4, q=6, r=4$ であるから、$4-6+4=2$

○オイラーの多面体公式
穴の空いていない多面体ならば、どの多面体Pでも、Pの頂点を頂点とし、Pの辺を辺とする平面グラフを対応させることができる。したがって、V, E, Fをそれぞれ多面体Pの頂点数、辺の個数、面の個数としたとき、$V-E+F=2$が成り立つ。



5面体



5面体の平面グラフ

正多面体は正 4, 6, 8, 12, 20 面体に限られる。

○平面グラフの頂点数と辺数
頂点数$p \geq 3$、辺数q、領域数rの連結平面グラフを考える。
（定理）$q \leq 3p-6$が成り立つ。
すべての領域は 3 本以上の辺で囲まれていることと、どの辺も高々2 つの領域の境界になっていることより、$2q \geq 3r$。オイラーの公式より、$q \leq 3p-6$が成り立つ。

（定理）K_5は平面的グラフではない。
K_5は$p=5, q=10$だから$q \leq 3p-6$を満たさない。したがって、K_5は平面的グラフではない。

（定理）$K(3,3)$は平面的グラフではない。
$K(3,3)$が平面的だとすると、各領域は 4 本以上の辺で囲まれるので、$2q \geq 4r$。オイラーの公式より$q \leq 2p-4$が成り立つが、$K(3,3)$はこの不等式を満たさない。したがって、$K(3,3)$は平面的グラフではない。

（クラトウスキーの定理）単純グラフが平面的であるための必要十分条件は、K_5または$K(3,3)$の辺上に頂点を付け加えた形の部分グラフ（同相なグラフ）を含んでいないことである。
$K_n(n \geq 5)$、$K(l,m)(l \geq 3, m \geq 3)$もそれぞれ$K_5$または$K(3,3)$を部分グラフとして含むため平面的グラフではない。