情報数学Ⅰ

第 11 回「連結性」

〇隣接行列と経路の数

隣接行列Aに対し、

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{個}}$$

とし、A^nの(i,j)成分を$a_{ij}^{(n)}$と書く。

（定理）グラフ$G=(\{P_1,\cdots,P_p\},E)$とし、その隣接行列をAとする。A^nの(i,j)成分$a_{ij}^{(n)}$はGにおける長さnの相異なるP_iP_j経路の個数である。

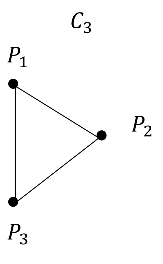
単純グラフについては次の性質が成り立つ。

(1) $a_{ii}^{(2)}=d(P_i)$

(2) $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{p}a_{ii}^{(3)}$は$G$における相異なる 3 辺形の個数である。

(3) $p\geq 2$のとき、Gが連結(Gのどの 2 頂点間にも経路がある)$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{p-1}A^n$のどの成分も正。

（例）



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}, A^2=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{bmatrix}$$

〇距離

距離 $d(P,Q)$：P–Q経路の長さの最小値のことを頂点PとQの間の距離といい、$d(P,Q)$と書く。

任意の$P,Q,R\in V$に対し次が成り立つ。

(i) $d(P,Q)\geq 0$

(ii) $d(P,Q)=0\Leftrightarrow P=Q$

(iii) $d(P,Q)=d(Q,P)$

(iv) $d(P,Q)+d(Q,R)\geq d(P,R)$　（三角不等式）

直径：グラフGのすべての 2 頂点間の距離の最大値をGの直径という。

〇連結グラフ

連結：$P, Q \in V$に対し、P-Q道が存在するとき、PとQは連結している、という。Gのどの 2 頂点間も連結しているとき、Gは連結である、という。2 頂点が「連結している」という関係は同値関係。

連結成分：Gの極大な連結部分グラフ。同値関係としてとらえると、同値類のこと。

（定理）グラフGが連結グラフならば$|E| \geq |V| - 1$である。

（定理）単純グラフGの頂点数pと辺数qの間に次の(1)，(2)，(3)のどれかが成り立てばGは連結である。

(1)　$q \geq \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$

(2)　Gの最小次数 $\geq \frac{p-1}{2}$

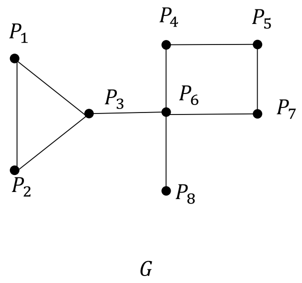
(3)　Gが閉路を持たず、$q \geq p - 1$

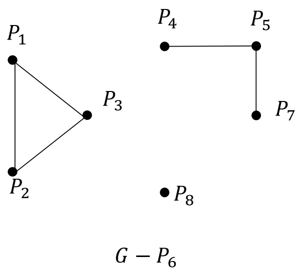
〇頂点と辺の削除

頂点Pの削除 $G - P$：Pとそれに接続するすべての辺を削除して得られるグラフ

辺eの削除 $G - e$：グラフGから辺eを削除したグラフ

（例）





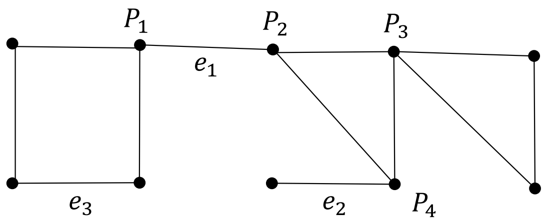
$G - P_6$の連結成分の個数 $= 3$

〇連結度

切断点：その点を削除すると、グラフが分断されてしまう点を切断点あるいは間接点あるいは分離点という。

橋：その辺を削除すると、グラフが分断されてしまう辺を橋あるいは切断辺あるいは分離辺という。

（例）



切断点： P_1, P_2, P_3, P_4

橋： e_1, e_2

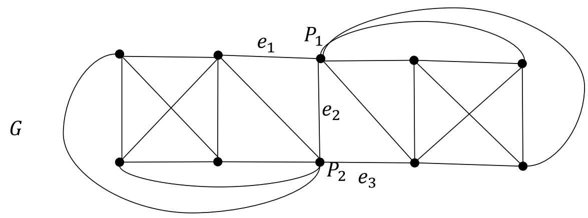
（定理） 頂点P（あるいは辺e）が切断点（あるいは橋）である必要十分条件は、どのQ−R道もP（あるいはe）を通るような、Pと異なる 2 頂点Q, Rが存在することである。

グラフGからある頂点集合を削除してグラフGを分断することを考える。

連結度： グラフGを分断するのに必要な最小頂点数のことを連結度といい、その頂点集合のことを切断点集合という。

辺連結度： グラフGを分断するのに必要な最小辺数のことを辺連結度といい、その辺集合のことを切断辺集合という。

（例）



連結度 $= 2$: P_1, P_2による

辺連結度 $= 3$: e_1, e_2, e_3による

最小次数 $= 4$

（ホイットニーの定理） 任意のグラフGに対して、連結度 $\leq$ 辺連結度 $\leq$ 最小次数 が成り立つ。

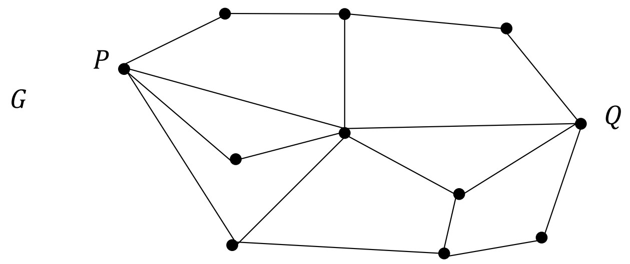
○2 頂点間の道の本数

カット：$P, Q \in V, S \subseteq E$とする。$G$から$S$を除去することによって$P$と$Q$が分離するとき、$S$は$P$と$Q$を分離する、という。$S$を$(P, Q)$カットまたはカットと呼ぶ。

辺素：二つの経路WとW'が辺を共有しないとき辺素であるという。

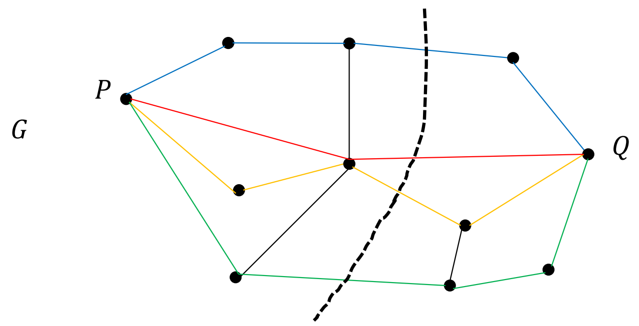
（メンガーの定理）PとQがGの相異なる頂点ならば、Gにおいて互いに辺素なP–Q道の最大本数はPとQを分離する辺の最小本数に等しい。

（例）



互いに辺素なP–Q道は最大いくつあるか？ 4 つ

PとQを分離する最小の切断辺はいくつか？ 4 つ



青線、赤線、黄線、緑線がそれぞれ辺素な道

太点線をまたぐ辺が切断辺

メンガーの定理は最大フロー最小カット定理につながる重要な定理。