情報数学 I

第 1 回「情報数学とは？命題，述語，論理記号」

・教科書
やさしく学べる離散数学　ISBN 9784320018464
石村 園子　　共立出版　2007 年

・参考書
情報の基礎離散数学—演習を中心とした　ISBN 9784764902763
小倉 久和　近代科学社　1999 年

・講義ウェブページ
http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/im1/

序論

“情報数学(離散数学)”とは

デジタル計算機科学で扱われる数学⇒有限で離散的対象を扱う数学
デジタル計算機

$\left.\begin{array}{r}\text{有限個の演算素子}\\\text{有限個のメモリー素子}\end{array}\right\}$で構成されている

扱うことができる記号は 0 と 1 のみである。⇒　有限でかつ離散的な量（記号）を扱う。

[問題]

$$\max\ 2x + xy$$
$$\mathrm{s.t.}\ x + y = 1$$

[解]

$$2x + xy = 2x + x(1 - x) = 3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

よって、$x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$のとき、最大値 $\frac{9}{4}$

$x \in \{0,1\}, y \in \{0,1\}$ だとどうなるだろう？$x + y = 1$より次の二通りしかない

$$2x + xy = 0\ (x = 0, y = 1)$$
$$2x + xy = 2\ (x = 1, y = 0)$$

よって、$x = 1, y = 0$のとき、最大値 2

[問題] 100 の変数で構成される関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_{100})$の値をすべて求めよ。ただし、各$x_i \in \{0,1\}$

[解]関数の値の表を求めるのに必要な計算時間を以下に求める。1 種類の変数パターンに対する関数値を求めるのに必要な時間は10^{-10}秒とする。全ての変数のパターンは2^{100}種類ある。全てのパターンに対する関数値を求めるのに必要な時間は$10^{-10} \times 2^{100} \fallingdotseq 10^{20}$(秒) $\fallingdotseq$ 3×10^4億年　　“実際には計算不可”

§1 集合と論理

§1.2 論理

○命題、述語、論理記号

定義 (definition): 概念の内容を限定すること。一意かつ変化しない。

　“定義は人間が決めたもの”

　“学問は定義から始まる”

叙述: ある事実を述べたもの。 (真 or 偽 or 真か偽かわからない)

(例)

・みみずは移動するとき空を飛ぶ (偽)

・人間には必ず背後霊がいる (真か偽かわからない)

・複素数の集合は実数の集合を包含している (真)

命題: 内容の真偽が確定している叙述を命題という。“真” “偽”を値と考え、“真”を”T”または”$true$”または”1”で表し、“偽”を”F”または”$false$”または”0”で表し、これを真理値(論理値)という。

(例)

命題	真理値
月にはうさぎが生息している	F
犬は動物である	T
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	T

述語：叙述$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$が含むすべての変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$に具体的値を与えると命題となる叙述を述語という。

(例)

①述語$P(x)$：xは動物である

$P(\text{犬}) = \mathrm{T}$，$P(\text{猫}) = \mathrm{T}$，$P(\text{木}) = \mathrm{F}$

② $x, y, r \in \mathbb{R}_+$(正の実数の集合）のとき

$$P(x, y) = \begin{cases} \mathrm{T} & (x^2 + y^2 = r^2) \\ \mathrm{F} & (x^2 + y^2 \neq r^2) \end{cases}$$

述語$P(x, y)$の意味

(x, y)は半径がrである円周上の点である

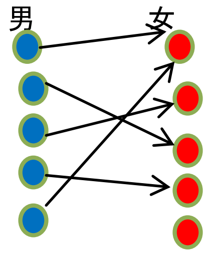
〇論理記号と論理演算

名前	記号	使用法	意味
全称記号	$\forall$	$\forall x\ F(x)$	任意のxに対して述語$F(x)$が成り立つ（全てのxに対して$F(x)$が成り立つ)
存在記号	$\exists$	$\exists x\ F(x)$	$F(x)$が成り立つようなxが存在する（$F(x)$が成り立つようなxが少なくとも 1 つ存在する)
否定	$\neg, \sim$	$\neg A$	Aは成立しない
論理積	$\wedge$	$A \wedge B$	AかつBが成立
論理和	$\vee$	$A \vee B$	AまたはBが成立
含意	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	Aが成り立つならばBも成り立つ（$\neg A \vee B$) AはBが成り立つための十分条件 BはAが成り立つための必要条件
同値	$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	AとBは同値である（$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$) AはBが成り立つための必要十分条件 BはAが成り立つための必要十分条件

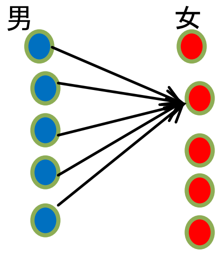
(例)

① ∀と∃の順番によって意味が変わる

$\forall x \in$ 男 $\exists y \in$ 女　xはyを愛している



$\exists y \in$ 女 $\forall x \in$ 男　xはyを愛している



② $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 1$

(注) $\mathbb{Z}$は整数の集合

(注) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z},\ x + y = 1$は成り立たない

③ $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = y$

(注) $x = 1$

④ 数列a_nがaに収束する ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

○命題、述語に関する重要な定理 (次の論理式は恒に真)

(二重否定) $\neg\neg P \iff P$

(分配律) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$　　$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(ド・モルガン律) $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$　　$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$

(限量子と否定の入れ替え) $\neg(\forall x\, P(x)) \iff \exists x(\neg P(x))$　　$\neg(\exists x\, P(x)) \iff \forall x(\neg P(x))$

(限量子の入れ替え) $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \iff \forall y\, \forall x\, P(x,y)$　　$\exists x\, \exists y\, P(x,y) \iff \exists y\, \exists x\, P(x,y)$

(三段論法) $(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

(対偶) $(P \Longrightarrow Q) \iff (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$

(背理法) $(P \Longrightarrow Q) \iff \neg(P \wedge \neg Q)$