知識工学 (第 6 回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

一階述語論理 (8)

§8.2 一階述語論理の統語論と意味論

命題論理を用いることで様々な知識を表現し、その知識に対し推論することを学んできた。しかし、命題論理の論理式はブール関数であり、その表現力にはおのずと限界がある。例えば、次のような命題を表現したいとしよう。

例 1

すべての人間は死ぬ。

ソクラテスは人間である。

∴ソクラテスは死ぬ

これは三段論法(syllogism)といわれる推論であるが、命題論理ではこれを取り扱うことができない。次の例も考えてみよう

例 2

モーツァルトは天才である。

ベートーベンは天才である。

これら二つの命題を単に命題記号PやQとするだけでは、「～は天才である」といった共通の関係を見いだすことができない。また次の例もみてみよう。

例 3

ジョンはヨーコを愛している。

この文を命題記号Pとすると、「～が～を愛している」という世の中にある多数の関係を記述するのにおよそ十分な一般性を有しているとは言いがたい。

これらの関係をみていると、なんらかの変数、定数、述語等を用いて表現する必要があるように考えられる。命題論理でとらえることができない関係を記述するために用いられているより強力な論理が一階述語論理である。最初の例は「$\forall x(Human(x) \Rightarrow Motal(x)) \wedge Human(Socrates)$」であるとき、「$Motal(Socrates)$」と結論づけることができる。次の例でも「$Genius(Mozart) \wedge Genius(Beethoven)$」と表現でき、さらに次の例も、「$Love(John, Yoko)$」と表現できる。ここで用いられた$Human$、$Motal$、$Genius$、$Love$など記号は述語と呼ばれる。述語には引数を記述することができ、引数の関係を表現することができる。また、さらに引数の一般的な性質を表したいとき、∀やヨといった限量記号を使って表現することができる。

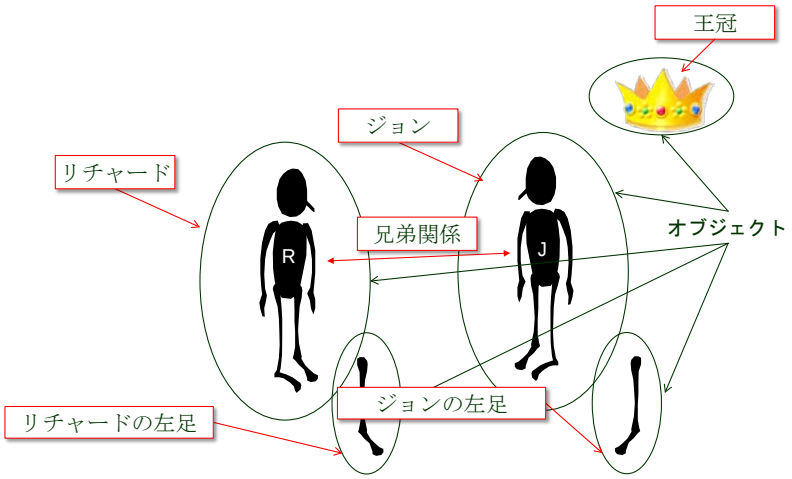
§8.2.1 一階述語論理におけるモデル(一階述語論理の意味論)

命題論理においては、命題記号に対する真理値表がその命題論理の意味を表しており、命題記号に対する真理値の割り当てがモデルと呼ばれていた。一階述語論理のモデルは次のように与えられる。

・オブジェクトの集合から成る。このオブジェクトの集合は領域(domain)と呼ばれる。

・オブジェクトおよびオブジェクト間には関係が定義されている。関係はn項組で定義される。

例えば、次のようなオブジェクトの集合を考えてみよう。



「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」は全てオブジェクトである。「ジョン」と「リチャード」は兄弟なので、(ジョン, リチャード)および(リチャード, ジョン)という「兄弟関係」が定義される。ジョンがこの王冠をかぶっていれば(ジョン, 王冠)という「頭上関係」が定義される。「ジョンの左足」は(ジョン, ジョンの左足)という「左足関係」で定義

される。ただし、「ジョン」に対する「ジョンの左足」はただ一つのオブジェクトしかないため、この関係は関数となっている。

§8.2.2 記号と解釈

次に、一階述語論理の統語論について説明する。まず、一階述語論理の基本的な記号には次の 3 種類がある。

定数記号: オブジェクトを表現する。$Richard$や$John$や$Crown$など。

述語記号: 関係を表現する。$Brother$や$OnHead$など。

関数記号: 関数を表現する。$LeftLeg$など。

論理式の真理値を決定するために、論理式とモデルとを関連づける必要がある。そのために、定数記号、述語記号、関数記号が参照するオブジェクト、関係、関数を規定する解釈が必要である。例えば、先ほどの例で可能な解釈としては、「$Richard$」という定数は「リチャード」というオブジェクトを参照し、「$John$」という定数は「ジョン」というオブジェクトを参照し、「$Crown$」という定数は「王冠」というオブジェクトを参照する。「$Brother$」という述語は、兄弟関係を参照し、「$LeftLeg$」という関数は、左足関係という関数を参照する。このようなモデルと解釈が与えられると、論理式の真偽を決定することができる。これは命題論理において、命題記号に真理値が割り当てられると、論理式の真偽を決定できることに対応する。つまり、一階述語論理においては、モデルと解釈が与えられると論理式の真偽を決定することができる、ということである。全ての可能なモデルおよび全ての可能な解釈という観点から、伴意関係や妥当性を定義することができ、これが推論の基礎となる。また、モデルの中には自然数などのように無限のオブジェクトが存在しうるため、可能なモデルを列挙するモデル検査は一般に一階述語論理では適用できない、ということに注意しよう。

§8.2.3 項

関数と定数と変数の組合せを項(term)と呼ぶ。定数も項である。項も定数同様何らかのオブジェクトを指す。例えば、関数と定数を組み合わせた$LeftLeg(John)$は項である。

§8.2.4 原子文

述語記号に括弧をつけて、項をその中に並べた論理式を原子文(atomic sentence)と呼ぶ。

原子文の例

$Brother(Richard, John)$

$Married(Father(Richard), Mother(John))$

ただし、$Married$は述語記号、$Father, Mother$は関数記号であり、$Father(Richard)$や$Mother(John)$は項であることに注意しよう。

§8.2.5 複合文

命題論理の場合と同様、論理結合子(∧,∨, ¬, ⇒, ⇔)を用いて原子文をつないだ論理式を複合文(complex sentence)と呼ぶ。

複合文の例

$\neg Brother(LeftLeg(Richard), John)$

$Brother(Richard, John) \wedge Brother(John, Richard)$

$King(Richard) \vee King(John)$

$\neg King(Richard) \Rightarrow King(John)$

§8.2.6 限量子

オブジェクトの集合に対する性質や関係をまとめて定義するための記号を限量子(quantifier)と呼ぶ。定数記号や関数記号を用いて列挙するのではなく、限量子と変数でまとめて関係や性質を定義することができる。

全称限量子(∀, universal quantifier): 「全ての…」と読む。$\forall x\ P$というふうに用いて、全てのオブジェクトxに対し、Pの論理式が真であるとき、$\forall x\ P$は真となる。

全称限量子の例

$\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)$

例えば、xが参照しうる領域を規定した拡張解釈が与えられたとき、xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうる。この各オブジェクトxに対し、$King(x) \Rightarrow Person(x)$が真となるならば、$\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)$は真となる。

存在限量子(∃, existential quantifier): 「ある…」と読む。$\exists x\ P$というふうに用いて、少なくともある一つ以上のオブジェクトxに対し、Pの論理式が真となるとき、$\exists x\ P$は真となる。

存在限量子の例

$\exists x\ Crown(x) \wedge OnHead(x, John)$

xは「リチャード」、「ジョン」、「ジョンの左足」、「リチャードの左足」、「王冠」を参照しうるが、xが「王冠」を参照したとき、$Crown(x) \wedge OnHead(x, John)$は真となるため、$\exists x\ Crown(x) \wedge OnHead(x, John)$は真となる。

[問題] 次の論理式はどちらも使い方として誤っている。何故か？

$$\forall x\ King(x) \wedge Person(x)$$

$$\exists x\ Crown(x) \Rightarrow OnHead(x, John)$$

○入れ子の限量子

限量子を並べて用いることで複雑な論理式を表現できる。

「兄弟は兄弟姉妹である」$\forall x \forall y\ Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)$

「兄弟姉妹関係は対称である」$\forall x \forall y\ Sibling(x, y) \Leftrightarrow Sibling(y, x)$

同じ種類の限量子が続く場合は次のように省略して記述することもできる。

「兄弟は兄弟姉妹である」の例 $\forall x, y\ Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)$

また、同じ種類の限量子はその順番を入れ替えても意味は変わらない。

$$\forall x \forall y\ P(x, y) \equiv \forall y \forall x\ P(x, y)$$

$$\exists x \exists y\ P(x, y) \equiv \exists y \exists x\ P(x, y)$$

異なる種類の限量子はその順番を変えると意味が異なるので注意が必要である。例えば、次の二つの論理式は意味が異なる。

$$\forall x \exists y \; Loves(x, y)$$

$$\exists y \forall x \; Loves(x, y)$$

○∀と∃の関係

否定を通して∀と∃には密接な関連がある。

$$\neg \exists x \; P \equiv \forall x \neg P$$

$$\neg \forall x \; P \equiv \exists x \neg P$$

つまり、否定(¬)を限量子の内側に入れることができ(出すことができ)、そのときに全称限量は存在限定に、存在限定は全称限定に入れ替わる。例えば、「誰もがパースニップを嫌う」は「パースニップを好きな人がいない」と等価である。

$$\forall x \neg \; Like(x, Parsnips) \equiv \neg \exists x \; Like(x, Parsnips)$$

さらに、「誰もがアイスクリームを好む」は「アイスクリームが嫌いな人はいない」と等価である。

$$\forall x \; Like(x, IceCream) \equiv \neg \exists x \neg \; Like(x, IceCream)$$

つまり、一般に次のことが成り立つ。

$$\forall x \; P \equiv \neg \exists x \neg P$$

$$\exists x \; P \equiv \neg \forall x \neg P$$

§8.2.7 等号関係

一階述語論理では等号(equality symbol)を用いることができる。これによって二つの項が同じオブジェクトを参照する、という意味の記述を行うことができる。

等号の例

$$Father(John) = Henry$$

これは、$Father(John)$が参照するオブジェクトと$Henry$が参照するオブジェクトが同じものであるということである。つまり、この原子文はある解釈が与えられたとき、その解釈において

$Father(John)$と$Henry$が同じオブジェクトを参照しているときに真となる。また、等号と否定を組み合わせて、二つの項が同一ではないオブジェクトではないことを記述することもできる。

例：「リチャードには少なくとも二人の兄弟がいる」

$$\exists x, y\ Brother(x, Richard) \wedge Brother(y, Richard) \wedge \neg(x = y)$$

$\neg(x = y)$は$x \neq y$と省略表記されることが多い。

[問題] $\exists x, y\ Brother(x, Richard) \wedge Brother(y, Richard)$だけだと「少なくとも二人の兄弟がいる」ことにはならない。何故か？

○バッカス・ナウア記法による一階述語論理の統語論

文→原子文 | (文　結合子　文) | 限量子 変数, … 文 | ¬文

原子文→述語(項, …) | 項 ＝ 項

項→関数(項, …) | 定数 | 変数

結合子→⇒ | ∧ | ∨ | ⇔

限量子→∀ | ∃

定数→A | X_1 | $John$ | …

変数→a | x | s | …

述語→$Before$ | $HasColor$ | $Raining$ | …

関数→$Mother$ | $LeftLeg$ | …