知識工学（第 4 回）

二宮 崇（ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp）

論理的エージェント(7 章のつづき)

〇前回までの復習

論理的同値関係($\alpha \equiv \beta$): 真理値表においてαとβの真理値が同じとなる。$\alpha \Leftrightarrow \beta$がトートロジー(命題記号にどんな真理値を代入しても常に真となる式)となることに等しい。

伴意関係($\alpha \vDash \beta$): $\alpha \equiv \alpha \land \beta$の関係を$\alpha \vDash \beta$と定義する。

1. $\alpha \vDash \beta$が成り立つということと$\alpha \Rightarrow \beta$がトートロジーとなることは等しい。
2. 論理的同値関係は伴意関係でもある。$\alpha \vDash \beta$ かつ $\beta \vDash \alpha$ であることと$\alpha \equiv \beta$であることは等価。
3. $KB \vDash \alpha$が成り立つならば、KBにαを追加してよい
4. 縮小律 $\alpha_1 \land \alpha_2 \land \alpha_3 \land \cdots \land \alpha_n \vDash \alpha_i$が成り立つ。$KB$の任意の知識$\alpha_i$に対し、$KB \vDash \alpha_i$。

推論: $KB \vDash \alpha$が成り立つどうか判定すること。知識ベースKBから何らかの方法で論理式αを導出すること。

モデル検査: $KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか調べるため、KBとαの真理値表をつくって確認する方法。$KB \Rightarrow \alpha$がトートロジーになっているかどうか確認すればよい。推論の一種。

背理法: 論理式$\alpha \land \neg\beta$が充足不能であることと$\alpha \vDash \beta$であることは等価。

・論理的同値関係

α	$\equiv$	$\alpha \wedge \alpha$	ベキ等律
α	$\equiv$	$\alpha \vee \alpha$	ベキ等律
$\alpha \wedge \beta$	$\equiv$	$\beta \wedge \alpha$	交換律
$\alpha \vee \beta$	$\equiv$	$\beta \vee \alpha$	交換律
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$\equiv$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	結合律
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$\equiv$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	結合律
$\neg\neg\alpha$	$\equiv$	α	復元律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	対偶律
$\alpha \Rightarrow \beta$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	含意
$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$\equiv$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$	双条件
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	ド・モルガン
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	ド・モルガン
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	分配律
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	吸収律
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	吸収律

・伴意関係

$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	α	縮小律 (And除去)
$\alpha \wedge \beta$	$\vDash$	β	縮小律 (And除去)
α	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
β	$\vDash$	$\alpha \vee \beta$	拡大律
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$	$\vDash$	β	モーダスポーネンス
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$	$\vDash$	$\neg\alpha$	モーダストレンス
$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\vDash$	β	選言的三段論法
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\vDash$	$\beta \vee \gamma$	融合規則

§7.5 命題論理における推論パターン

我々は多くの場合、知識ベース(KB)が与えられたとき、ある質問(Q)がKBにおいて成り立つかどうか、ということを知りたい。これは、その伴意関係$KB \vDash Q$が成り立つかどうかを判定することによって実現される。$KB \vDash Q$が成り立つかどうか判定することを推論または証明と呼ぶ。推論はなんらかの手続きによって与えられるため、KBからαが導出される推論を$KB \vdash \alpha$と表現する(関係ではなく手続き)。論理的同値関係や伴意関係により式を展開する方法もあれば、モデル検査のように真理値表で直接確かめる方法もある。

モデル検査においてモデルを全列挙すればその伴意関係を判断できるが、この方法は必ず指数オーダーの計算ステップを要する。命題論理における推論は NP 完全であることがわかっているため、最悪計算量はやはり指数オーダーとなるものの、現実的にはより効率的に行える場合が多く存在す

ることがわかっている。そのため、伴意関係が成り立つかどうかを調べるための推論アルゴリズムが多く提案されている。

推論できた場合には必ず伴意関係にあることが保証されている推論アルゴリズムは「健全(sound)である」と言われる($KB \vdash \alpha$なら$KB \vDash \alpha$であるとき健全)。逆に伴意関係にある論理式を必ず推論できる推論アルゴリズムは「完全(complete)である」と言われる($KB \vDash \alpha$なら$KB \vdash \alpha$であるとき完全)。完全性を満たすのは難しいが、幸いなことに論理における完全な推論手続きが存在する。また、モデル検査は任意のKBとαに対して有限時間で終了するため、健全かつ完全な推論方法である。

〇問題設定

知識ベースKBと質問αが与えられ、$KB \vDash \alpha$が成り立つかどうか知りたい。

〇準備

知識ベースは$KB = R_1 \wedge \cdots \wedge R_n$というふうに論理式の連言の形となっている。それぞれR_iが知識となっているが、推論の基本的な戦略は知識ベースに対する論理的同値関係を保持したまま、新しい知識Rを増やしていくこととなる($KB \equiv KB \wedge R$)。つまり、$KB \vDash R$となるRを導出し、知識ベースに新しい知識Rを追加することを繰り返すことによって、知識ベースの知識をより豊かにしていく。最終的に質問αが導出されれば$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

知識ベースはこのように知識の集合として捉えられるので、$KB = \{R_1, \cdots, R_n\}$とも表現する。また、推論は各知識に対し行うため、ある知識PとQから新しい知識Rが得られる(推論される)とき、次のように表記する。

$$P, Q \vdash R \qquad \text{もしくは} \qquad \frac{P \qquad Q}{R}$$

〇証明の戦略その 1

1. $KB \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースに追加する(知識ベースは更新される)。この操作(推論)を$KB \vdash R$と書くことにする。

2. $KB \vdash \alpha$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

3. 1.に戻る。

1.については、伴意関係の性質により知識ベースの真理値を変えないように知識を増やしている(推論している)、といえる。2.については、推論の結果、$KB \equiv KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge \alpha$となれば、縮小律より$KB \wedge R_1 \wedge \cdots \wedge R_n \wedge \alpha \vDash \alpha$となる。つまり、$KB \vDash \alpha$となる。

　推論(⊢)は、伴意関係にある$KB \vDash R$をみつけることを繰り返し、最終的にαをみつけることが目標となる。

・伴意関係による推論規則 ($KB \vdash R$)

$KB \vDash R$ について、その定義より、$KB \equiv KB \wedge R$ が成り立つ。このことから、知識ベースから伴意関係にある論理式を求め、その論理式を新しい知識として知識ベースに追加することができる。

例

モーダスポーネンス (Modus Ponens, 三段論法)

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$

縮小律 (And 消去, And-Elimination)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

・論理的同値関係による推論規則 ($KB \vdash R$)

論理的同値関係は双方向に成り立つ伴意関係であったため、論理的同値関係を用いて推論をすすめることもできる。

双条件除去 (biocnditional elimination)の例

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)} \qquad \frac{(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

〇ワンパスワールドの例

証明をする際に論理的同値関係≡で式をつないでいると同じ論理式を何度も書かなければならなくなってしまって煩雑である。そこで、知識ベースの各知識に ID をつけ、新しく追加される知識にも新しい ID をつけて ID を使って推論過程を表現することにする。

知識ベース

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

質問: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

R_2に双条件除去を適用し、

R_6:　$\left(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})\right) \wedge \left((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}\right)$

続いて、And 除去を行い、

R_7:　$(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$

次に対偶をとり、

R_8:　$\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

ここで、R_8とR_4に対し、モーダスポーネンスを適用し、

R_9:　$\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1})$

を得る。ド・モルガンの法則より、

R_{10}:　$\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$

を得る。従って、[1,2]と[2,1]に穴がないことがわかる。

〇証明の戦略その 2 (背理法)

背理法を用いるとより簡単に証明できる場合が多い。背理法による証明では、$KB \land \neg\alpha \equiv KB \land \neg\alpha \land R$となる$R$を導出していき、$false$が導出されるまでこれを繰り返す。$false$が導出されたならば、$KB \land \neg\alpha \equiv KB \land \neg\alpha \land \cdots \land false$となり$KB \land \neg\alpha$は常に偽となる(充足不能)ことから背理法より$KB \vDash \alpha$が証明できたことになる。

1. $KB' = KB \land \neg\alpha$とする。

2. $KB' \vDash R$となるRをみつけRを知識ベースKB'に追加する(知識ベースKB'は更新される)。この操作(推論)を$KB' \vdash R$と書くことにする。

3. $KB' \vdash false$となれば、$KB \vDash \alpha$が証明されたことになる。

4. 2.に戻る。

〇ワンパスワールドの例

R_1:　$\neg P_{1,1}$

R_2:　$B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$

R_3:　$B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \lor P_{2,2} \lor P_{3,1})$

R_4:　$\neg B_{1,1}$

R_5:　$B_{2,1}$

ここで、質問を$\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$とし、その否定を知識ベースに追加し、矛盾($false$)を導出することを目指す。

R_6:　$\neg(\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1})$

R_6に対しド・モルガンと復元律により、

R_7:　$P_{1,2} \lor P_{2,1}$

を得る。R_2に双条件除去と And 除去を適用し、

R_8:　$(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$

を得る。ここで、R_7とR_8に対し、モーダスポーネンスを適用し、

R_9:　$B_{1,1}$

を得る。R_4とR_9より、

R_{10}:　$false$

となる。従って、充足不能であることが示せた。よって、$KB \models \neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$が成り立つ。

問題　質問が$\neg P_{1,2}$だけの場合の証明を与えよ。