
知識工学(第13回)

二宮 崇 (ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp)

確率推論 (14章)

§ 14.3 条件付き確率分布の効率的な表現

親の数を k としたとき、CPTのサイズは $O(2^k)$ になってしまう

○基準的な分布(canonical distribution)

分布を決定するパターンといくつかのパラメータを与えることでCPTを再現

決定的なノード: 親の値によって、子の値が不確実性なく論理的に与えられる。

例

親ノード: *Canadian, US, Mexican*

子ノード: *NorthAmerican*

親ノード: 複数の車のディーラーの価格

子ノード: ユーザーの購入価格(最低価格を常に選択)

親ノード: 湖への流入水量, 流出量

子ノード: 湖の水位

Noisy-OR モデル: 不確実な論理和のモデル。ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力が独立に与えられる確率モデル。

仮定 1) 原因が親によって全て列挙されている

仮定 2) ある親ノードが真であるとき子ノードを偽とする抑制力は他の親ノードに対し独立に与えられる。(各親ノードに対する中間ノードを定義し、中間ノードの論理和により子ノードの真偽を決定的に与えるモデルと等価)

$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_n$

↓ ↓ ↓ ↓

$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad \dots \quad Z_n \rightarrow Y$ (論理和による決定的ノード)

例

親ノード: *Cold, Flu, Malaria*, 子ノード: *Fever*

$$q_{malaria} = P(\neg fever | \neg cold, \neg flu, malaria) = 0.1$$

$$q_{flu} = P(\neg fever | \neg cold, flu, \neg malaria) = 0.2$$

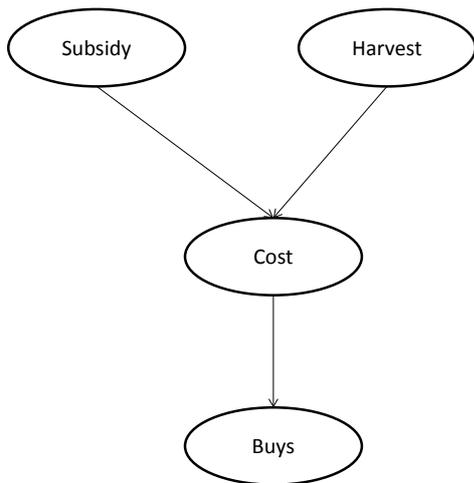
$$q_{cold} = P(\neg fever | cold, \neg flu, \neg malaria) = 0.6$$

$$P(x_i | parents(X_i)) = 1 - \prod_{\{j: X_j = true\}} q_j$$

CPT

<i>Cold</i>	<i>Flu</i>	<i>Malaria</i>	$P(\text{fever})$	$P(\neg\text{fever})$
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	0.0	1.0
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	0.9	0.1
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	0.8	0.2
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	0.98	$0.02 = 0.2 \times 0.1$
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	0.4	0.6
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	0.94	$0.06 = 0.6 \times 0.1$
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	0.88	$0.12 = 0.6 \times 0.2$
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	0.988	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$

ハイブリッドベイジアンネット: 離散変数と連続変数の両方を持つベイジアンネット



論理確率変数: *Subsidy*(助成金), *Buys*(購入)

連続確率変数: *Harvest* (収穫量), *Cost*(価格)

◇離散変数と連続変数に対する連続変数の確率分布

線形ガウス分布による収穫量*h*に対する価格*c*の確率分布

$$P(c|h, \text{subsidy}) = N(a_t h + b_t, \sigma_t^2)(c) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{c - (a_t h + b_t)}{\sigma_t} \right)^2}$$

$$P(c|h, \neg \text{subsidy}) = N(a_f h + b_f, \sigma_f^2)(c) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{c - (a_f h + b_f)}{\sigma_f} \right)^2}$$

◇連続変数に対する離散変数の確率分布

ある一定以上の値なら 1 に、以下なら 0 に近い確率分布

正規分布の累積分布関数 (プロビット分布)

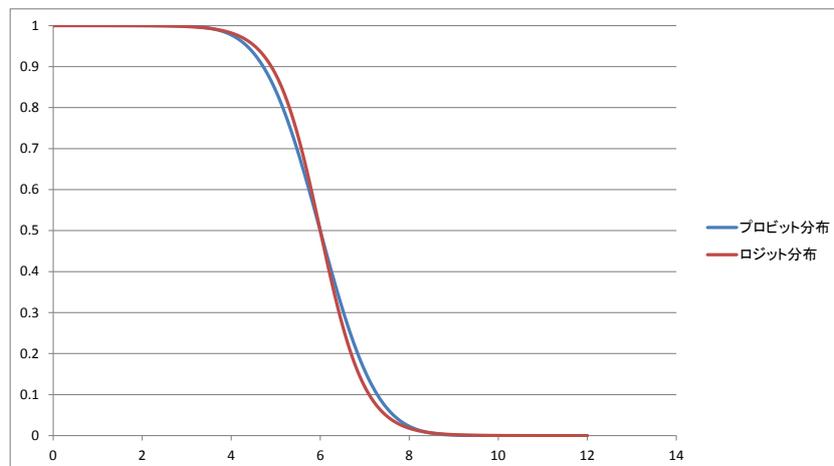
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x N(0,1)(x) dx$$

$$P(\text{buys} | \text{Cost} = c) = \Phi\left(\frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$

ロジスティック関数(ロジット分布)

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$P(\text{buys} | \text{Cost} = c) = \Phi\left(2 \frac{-c + \mu}{\sigma}\right)$$



§ 14.4 ベイジアンネットの厳密推論

推論: 特定の観測事象 e が与えられたもとで、質問変数 X の事後確率分布 $P(X|e)$ を計算すること。観測事象 e は証拠変数の集合 E に値を割り当てたもの。

全ての変数集合: $X = \{X\} \cup E \cup Y$

Y : 隠れ変数(非証拠、非質問の変数集合)

例

$$P(\text{Burglary} | \text{JohnCalls} = \text{true}, \text{MaryCalls} = \text{true}) = \langle 0.284, 0.716 \rangle$$

§ 14.4.1 列挙による推論

$$P(X|e) = \alpha P(X, e) = \alpha \sum_y P(X, e, y)$$

ベイジアンネットを使って $P(X, e, y)$ を求めて $P(X|e)$ を計算すれば良い。

例

$$P(\text{Burglary} | \text{JohnCalls} = \text{true}, \text{MaryCalls} = \text{true})$$

$$P(B|j, m) = \alpha P(B, j, m) = \alpha \sum_e \sum_a P(B, j, m, e, a)$$

時間計算量 $O(n2^n)$

$$\begin{aligned} P(b|j, m) &= \alpha \sum_e \sum_a P(b)P(e)P(a|b, e)P(j|a)P(m|a) \\ &= \alpha P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b, e)P(j|a)P(m|a) \\ &= \alpha P(b) \{P(e)(P(a|b, e)P(j|a)P(m|a) + P(\neg a|b, e)P(j|\neg a)P(m|\neg a)) \\ &\quad + P(\neg e)(P(a|b, \neg e)P(j|a)P(m|a) + P(\neg a|b, \neg e)P(j|\neg a)P(m|\neg a))\} \\ &= \alpha 0.001 \times (0.002 \times (0.95 \times 0.90 \times 0.70 + 0.05 \times 0.05 \times 0.01) + 0.998 \\ &\quad \times (0.94 \times 0.90 \times 0.70 + 0.06 \times 0.05 \times 0.01)) = \alpha 0.00059224 \end{aligned}$$

同様に $P(-b|j, m)$ を求める

$$P(-b|j, m) = \alpha 0.00149191$$

よって、 $P(B|j, m) = \alpha(0.00059224, 0.00149191) = \langle 0.284, 0.716 \rangle$

時間計算量: $O(2^n)$