

# 知識工学(第11回)

二宮 崇 ( [ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp](mailto:ninomiya@cs.ehime-u.ac.jp) )

## 不確実性 (13章)

### § 13.3 完全結合確率分布を用いた推論

*Toothache* (歯痛), *Cavity* (虫歯), *Catch* (歯医者の不愉快さぐり針が痛い歯にひっかかる)という三つの論理確率変数に対する完全結合分布

| <i>Toothache</i> | <i>Cavity</i> | <i>Catch</i> | <i>P</i> |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.576    |
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.144    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.008    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.072    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.064    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.016    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.012    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.108    |

$$P(\text{cavity} \vee \text{toothache}) = 0.008 + 0.072 + 0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108 = 0.28$$

| <i>Toothache</i> | <i>Cavity</i> | <i>Catch</i> | <i>P</i> |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.576    |
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.144    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.008    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.072    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.064    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.016    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.012    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.108    |

周辺化 (marginalization): 集合変数 $Y, Z$ に対し、

$$P(Y) = \sum_{z \in Z} P(Y, z) = \sum_{z \in Z} P(Y|z)P(z)$$

例:  $P(\text{cavity}) = 0.008 + 0.072 + 0.012 + 0.108 = 0.2$

| <i>Toothache</i> | <i>Cavity</i> | <i>Catch</i> | <i>P</i> |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.576    |
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.144    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.008    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.072    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.064    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.016    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.012    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.108    |

条件付確率

$$P(\text{cavity}|\text{toothache}) = \frac{P(\text{cavity} \wedge \text{toothache})}{P(\text{toothache})} = \frac{0.012 + 0.108}{0.064 + 0.016 + 0.012 + 0.108} = 0.6$$

| <i>Toothache</i> | <i>Cavity</i> | <i>Catch</i> | <i>P</i> |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.576    |
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.144    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.008    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.072    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.064    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.016    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.012    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.108    |

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} = 0.4$$

| <i>Toothache</i> | <i>Cavity</i> | <i>Catch</i> | <i>P</i> |
|------------------|---------------|--------------|----------|
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.576    |
| <i>false</i>     | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.144    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.008    |
| <i>false</i>     | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.072    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>false</i> | 0.064    |
| <i>true</i>      | <i>false</i>  | <i>true</i>  | 0.016    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>false</i> | 0.012    |
| <i>true</i>      | <i>true</i>   | <i>true</i>  | 0.108    |

(赤線に囲まれた部分が分母に対応。オレンジ色部分が分子に対応。)

*Cavity*に関する計算ではどちらでも、 $1/P(\text{toothache})$ が定数としてかけられていて、 $P(\text{Cavity}|\text{toothache})$ の総和が1になる。この定数のことを正規化(normalization)定数と呼ぶ。正規化定数を表すのに $\alpha$ を用いる。

$$\begin{aligned} P(\text{Cavity}|\text{toothache}) &= \alpha P(\text{Cavity}, \text{toothache}) \\ &= \alpha [P(\text{Cavity}, \text{toothache}, \text{catch}) + P(\text{Cavity}, \text{toothache}, \neg \text{catch})] \\ &= \alpha [\langle 0.108, 0.016 \rangle + \langle 0.012, 0.064 \rangle] = \alpha \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle \end{aligned}$$

$X$ を質問の確率変数、 $E$ を証拠の確率変数とし、 $e$ を $E$ の観測値とする。 $Y$ を残りの非観測変数の集合としたとき、

$$P(X|e) = \alpha P(X, e) = \alpha \sum_{y \in Y} P(X, e, y)$$

### § 13.4 独立

完全結合確率分布がわかっているならば、任意の離散確率変数の確率分布を得ることができる。

完全結合確率分布の問題点: 確率変数の数に対し、指数オーダーの表が必要。実際には数百や数千といった確率変数が存在するので、求めることはほぼ不可能。

○独立性の仮定

$$\begin{aligned} P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}, \text{cloudy}) \\ = P(\text{cloudy}|\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity})P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}) \end{aligned}$$

しかし、歯痛や虫歯が天気に影響を及ぼすことはおよそありえない。従って、

$$P(\text{cloudy}|\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}) = P(\text{cloudy})$$

と仮定する。

$$P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}, \text{cloudy}) = P(\text{cloudy})P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity})$$

となる。

命題 $a$ と $b$ の独立:  $P(a|b) = P(a)$  or  $P(b|a) = P(b)$  or  $P(a \wedge b) = P(a)P(b)$

確率変数の集合 $X$ と $Y$ の間の独立性:  $\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X)$  or  $\mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y)$  or  $\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$

独立性の例: コイントス  $P(C_1, \dots, C_n) = \prod_{i=1}^n P(C_i)$

### § 13.5 ベイズ規則とその使用法

$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$ より

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)} \quad (\text{ベイズ規則, Bayes' rule})$$

$$\mathbf{P}(Y|X) = \frac{\mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)}$$

ある証拠 $e$ に対して、

$$\mathbf{P}(Y|X, e) = \frac{\mathbf{P}(X|Y, e)\mathbf{P}(Y|e)}{\mathbf{P}(X|e)}$$

§ 13.5.1 ベイズ規則の適用: 単純なケース

○因果モデルと診断モデル

因果モデル:  $P(effect|cause)$

診断モデル:  $P(cause|effect)$

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

§ 13.5.2 ベイズ規則の適用: 証拠の組合せ

$$P(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha P(toothache \wedge catch|Cavity)P(Cavity)$$

*toothache*と*catch*は独立ではない。しかし、虫歯が存在しているかどうかを与えられたのなら、これらの二つは独立している。

○条件付き独立性

$$P(toothache \wedge catch|Cavity) = P(toothache|Cavity)P(catch|Cavity)$$

一般には $P(X, Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z)$

$$P(X|Y, Z) = P(X|Z) \text{ and } P(Y|X, Z) = P(Y|Z)$$

例

$$P(Toothache, Catch, Cavity)$$

$$= P(Toothache, Catch|Cavity)P(Cavity)$$

$$= P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)P(Cavity)$$

条件付の独立性の表明は、変数が増えても確率的なシステムを実現可能にし、さらに、それらの条件付独立性は絶対的独立性よりもはるかに多くの場合で成立する。

○単純ベイズ (naïve Bayes)

$$\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \dots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause) \prod_i \mathbf{P}(Effect_i | Cause)$$

このモデルによる識別器(classifier)はベイズ識別器(Bayesian classifier)と呼ばれる。