情報数学 I

第 9 回「順序集合-ブール関数」

§ブール演算

0 と 1 から構成される。

①論理学

真 … 1

偽 … 0

②ディジタル回路

パルス有り…1

パルス無し…0

(注) この場合の 1 または 0 は実数の 1 と 0 の意味ではない

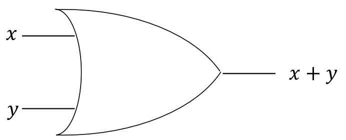
ブール演算 (Boolean operator): 集合$B = \{0,1\}$のブール代数で定義される演算を総称してブール演算といい、和演算+と積演算・の 2 種類の 2 項演算と補演算 ‾ の 1 種類の単項演算から成る。(ブール演算では∧の代わりに･、∨の代わりに＋を用いる)

ブール演算	和演算	積演算	補演算
束	上限	下限	補元
論理	論理和 OR	論理積 AND	否定 NOT

〇 和演算(論理和、OR ゲート)

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

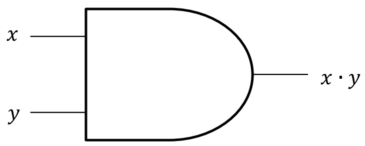
OR ゲート



○ 積演算(論理積、AND ゲート)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

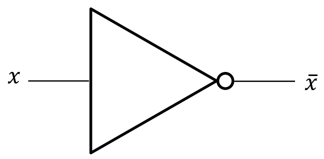
AND ゲート



○補演算 (否定、NOT ゲート)

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

NOT ゲート



§ブール関数と真理値表

○ブール関数 (boolean function)、論理関数

変数$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0,1\}$

変数自身またはいくつかの変数にブール演算(和演算+、積演算·、補演算¯)を施して得られる関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$をブール関数または論理関数という。

(注) コンピュータの演算回路はブール関数で表される。

○真理値 (truth value)、真理値表 (truth table)

n個の変数$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0,1\}$からなるブール関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は$n$個の変数の値の組合せが$2^n$個ある。

変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$に具体的に値を入れたブール関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の値を真理値といい、すべての変数の値の組合せに対する真理値を表にしたものを真理値表という。

〇ブール演算の優先順位

ブール演算の優先順位は以下のとおりである。

1．積演算·

2．和演算＋

補演算￣は横棒の範囲に対して施す。

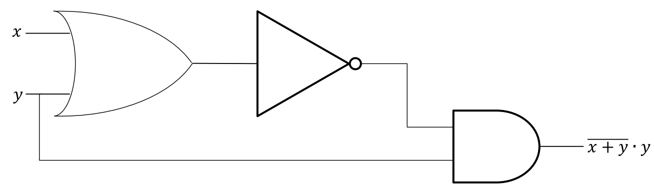
(例) $f(x,y,z)=\overline{x\cdot\overline{y}+z}=\overline{(x\cdot(\overline{y}))+z}$

(例) $f_1(x,y)=\overline{x+y}\cdot y$

真理値表

x	y	$\overline{x+y}$	$\overline{x+y}\cdot y$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

ゲート回路構成

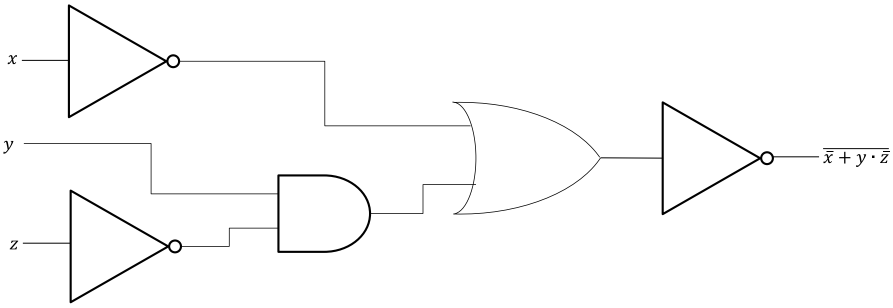


(例)$f_2(x,y,z)=\overline{\bar{x}+y\cdot\bar{z}}$

真理値表

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$y\cdot\bar{z}$	$\bar{x}+y\cdot\bar{z}$	$\overline{\bar{x}+y\cdot\bar{z}}$
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1

ゲート回路構成



§ブール関数の簡単化

ブール代数の性質を利用してブール関数をより簡単な表現(ゲート数の少ない表現)に置き換えることをブール関数の簡単化という。

(例) $x+x\cdot y=x$ (吸収律)

(例) $x\cdot(x+y)=x$ (吸収律)

(例) $x\cdot y+\bar{x}\cdot y=(x+\bar{x})\cdot y=y$

(例) $\bar{x}+\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{x}$

(例) $x+\overline{x+y}=x+\bar{x}\cdot\bar{y}=x+\bar{y}$

(例)

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\overline{\bar{x}+\bar{y}}+(\overline{\bar{x}+\bar{y}}+y)\cdot(x+\bar{x}\cdot y+z)+(z+\overline{\bar{x}+\bar{z}})\cdot(\bar{z}+x\cdot\bar{y})+\overline{\bar{x}+y+\bar{z}}\\&=x\cdot y+(x\cdot y+y)\cdot(x+y+z)+(z+x\cdot z)\cdot(\bar{z}+x\cdot\bar{y})+x\cdot\bar{y}\cdot z\\&=x\cdot y+y\cdot(x+y+z)+z\cdot(\bar{z}+x\cdot\bar{y})+x\cdot\bar{y}\cdot z\\&=x\cdot y+y+x\cdot\bar{y}\cdot z+x\cdot\bar{y}\cdot z=y+x\cdot\bar{y}\cdot z=y+x\cdot z\end{aligned}$$

(例)$\bar{x}\cdot\bar{y}+y\cdot z+x\cdot z=\bar{x}\cdot\bar{y}+(x+y)\cdot z=\bar{x}\cdot\bar{y}+\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}\cdot z=\bar{x}\cdot\bar{y}+z$