情報数学 I

第 8 回「順序集合-半順序集合、束、ブール束」

§4.2 束とブール代数

§4.2.1 束（lattice）

束（lattice）: 半順序集合Lにおいて、$\forall x, y \in L$に対して、上限$\sup\{x, y\}$および下限$\inf\{x, y\}$が常に存在する半順序集合Lを束という。

結び（join）: 束Lにおいて上限$\sup\{x, y\} = x \vee y$と表し、結び（join）という。

交わり（meet）: 下限$\inf\{x, y\} = x \wedge y$と表し、交わり（meet）という。

〇代数系

集合Aに対し、$A \times A$からAへの写像をAの 2 項演算という。また、$*$がAの 2 項演算であるとき、Aは 2 項演算$*$について閉じているという。

代数系: 集合Aに演算$*$が定義されているとき、集合Aと演算$*$をあわせて代数系$(A; *)$といい、群、環、体、束などがある。

[定理]

代数系$(L; \wedge, \vee)$が次の性質を満たすときLは束である。

(1) 交換律を満たす。$\forall x, y \in L$に対して

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

(2) 結合律を満たす。$\forall x, y, z \in L$に対して

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

(3) 吸収律を満たす。$\forall x, y \in L$に対して

$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$

上記(1)～(3)を満たす代数系$(L;\wedge,\vee)$に対し、半順序関係$\leq$を次のように定義すれば、元の半順序集合$(L;\leq)$になる。

$$a \wedge b = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b$$

$$\text{（ もしくは } a \vee b = b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b \text{ ）}$$

半順序集合の束$(L;\leq)$	代数系の束$(L;\wedge,\vee)$
上限 $\sup\{x,y\}$	$x \vee y$
下限 $\inf\{x,y\}$	$x \wedge y$
$a \leq b$	$a \wedge b = a$（または $a \vee b = b$）

有限な束には必ず最大元(1 と書く)と最小元(0 と書く)が存在する。

§4.2.2 ブール代数

〇分配束

分配束：Lを束とする。次の分配律を満たすとき、この束Lを分配束という。

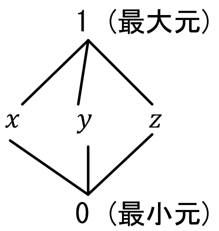
(1) 分配律

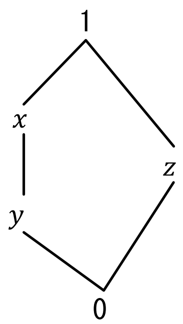
$\forall x,y,z \in L$に対して、

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

[定理]

束Lが、次のハッセ図で表される束に同型な部分束を含まないならばLは分配束である。





〇ブール束

補元 (complement)：Lを束とする。$x \in L$に対して、

$$x \vee a = 1 \text{ (最大元)}$$
$$x \wedge a = 0 \text{ (最小元)}$$

を同時に満たすaをxの補元といい、$\bar{x}$で表す。

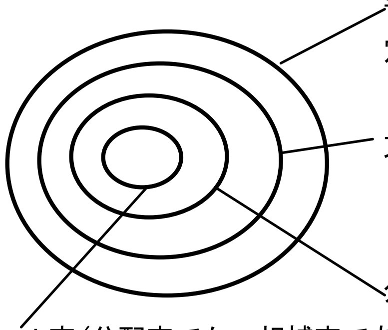
相補束： 束Lのすべての要素が少なくとも 1 つの補元をもつとき、Lを相補束という。

ブール束 （boolean lattice）、ブール代数（boolean algebra）： 分配束でありかつ相補束である束をブール束またはブール代数という。

[定理]
分配束において相補束であるならば、任意の要素の補元はただ一つ存在する。この定理より、単項演算 ‾ が定義でき、それを補演算という。
（注） 演算した結果は一意でないといけない

すなわち、ブール束では、2 種類の 2 項演算$\vee,\wedge$と 1 種類の単項演算 ‾ が定義される。
これらの演算をブール演算という。

順序集合の包含関係



〇ブール代数の性質
集合Bがブール代数であるとき、$\forall x, y, z \in B$に対して次の法則が成り立つ。

(1) 結合律（束の条件）

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

(2) 交換律（束の条件）

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

(3) 吸収律（束の条件）

$$x \vee (x \wedge y) = x$$
$$x \wedge (x \vee y) = x$$

(4) ベキ等律（束の性質）

$$x \vee x = x$$
$$x \wedge x = x$$

(5) 分配律（分配束の条件）

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

(6) 復元律（相補束の条件）

$$\bar{\bar{x}} = x$$

(7) ド・モルガン律

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

(8) 補元の性質（相補束の条件）

$$x \vee \bar{x} = 1$$
$$x \wedge \bar{x} = 0$$
$$\bar{0} = 1$$
$$\bar{1} = 0$$

(9) 0 の性質（束の条件）

$$x \vee 0 = x$$
$$x \wedge 0 = 0$$

(10) 1 の性質（束の条件）

$$x \vee 1 = 1$$
$$x \wedge 1 = x$$

(11) 補元の吸収（分配律と補元の性質より）

$$x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$$
$$x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$$

〇双対（dual）

ブール代数の命題の ∨ と ∧ および 0 と 1 を交換して得られる命題をブール代数の双対という。

（例）$x \vee 1 = 1$の双対は$x \wedge 0 = 0$である。

[定理] 双対原理

ブール代数において任意の定理の双対も定理である。