情報数学 I

第 6 回「写像-全射、単射、全単射、濃度」

§2.2 写像

§2.2.1 写像

写像 (mapping), 関数 (function): 集合S,Tが与えられたとき、全ての各々の$x \in S$ (Sの 1 個の要素)に対して、それぞれただ一つの要素$y \in T$を対応させる関係fが定まっているとする。fを集合Sから集合Tへの写像あるいは関数といい、$f: S \to T$または$S \xrightarrow{f} T$で表す。Sをfの定義域(domain)、Tをfの値域(range)という

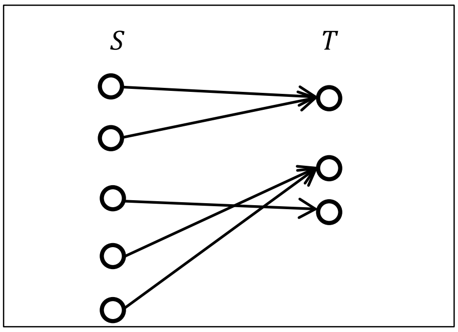
(注) 数値を数値に写像する関数 (既に習った関数)

汎関数: 関数を数値に写像する。

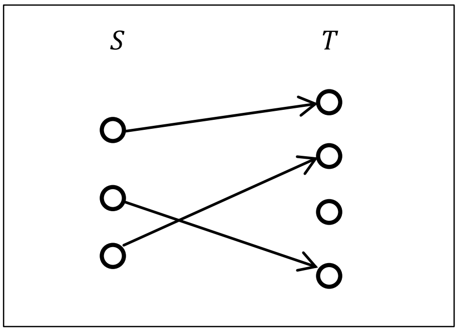
作用素: 関数を関数に写像する。

$$\text{写像(関数)}\begin{cases}\text{全射}\\ \text{単射}\\ \text{全単射}\end{cases}$$

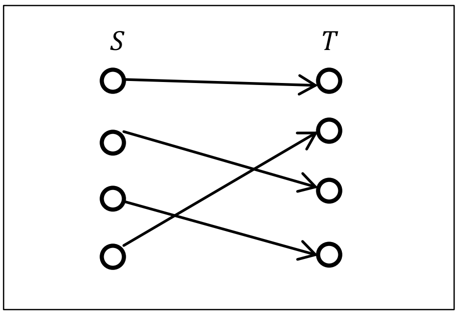
全射 (surjection): 写像$f: S \to T$において、T内の全ての要素がS内の少なくとも一つの要素に対応するとき、写像は全射であるという



単射（injection）: 写像$f: S \to T$において、$f(S)$の要素がSのただ一つの要素に対応するとき、この写像fは単射であるという。



全単射（bijection）: 写像 $f: S \to T$においてfが全射かつ単射であるとき、この写像は全単射であるという。$|S| = |T|$となる。



全単射同型, 対等（equipotent）: 集合Sから集合Tへの全単射が存在するとき、SとTは全単射同型、または、対等であるという。

§2.2.3 可付番集合

無限集合の要素の数を数える

濃度(cardinality): 2つの集合A, Bの間に全単射写像が存在するとき、A, Bは同じ濃度であるという。無限集合の要素の数を濃度（cardinality)で表現。

可付番濃度: 自然数全体の集合$\mathbb{N}$の濃度を可算濃度または可付番濃度という。(無限集合の濃度の基本)

可付番集合: 自然数全体の集合$\mathbb{N}$と同じ濃度を持つ集合を可算集合または可付番集合という。

連続体の濃度: 実数全体の集合$\mathbb{R}$の濃度を連続体の濃度という。実数全体の集合$\mathbb{R}$は自然数全体の集合$\mathbb{N}$と全単射同型でない。

連続体 ＞ 可算集合
カントールが対角線論法により証明した。

自然数の偶数全体の集合と自然数の集合$\mathbb{N}$とどちらが濃度が大きいか？
自然数の偶数全体の集合を$\{n|n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$とすれば自然数と全単射同型になる。

$$\text{自然数の偶数全体の集合} \subset \text{自然数全体の集合}$$
$$|\text{自然数の偶数全体の集合}| = |\text{自然数全体の集合}|$$

集合A, Bが有限集合ならば

$$A \subset B \Longrightarrow |A| < |B|$$