情報数学 I

第８回「代数構造-環」

3-2　環（ring）
(keywords)
① 環
加法と乗法の二種類の二項演算が定義され、次の４つの条件を満たす集合Rを環という。
(1) 加法演算および乗法演算に関して閉じている。すなわち、$\forall x, y \in R$に対して、$x + y \in R, x \cdot y \in R$である。

(2) 加法について可換群をなす。すなわち、$\forall x, y \in R$に対して、$x + y = y + x$を満たす群である。

(3) 乗法に関しては結合律を満たす。すなわち、$\forall x, y, z \in R$に対して、$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$が成り立つ。

(4) 分配律を満たす。すなわち、$\forall x, y, z \in R$に対して、$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$となる。

(注) (1)(2)より減法が定義される。$(x - y)$はxにyの加法逆元$-y$を加える。

すなわち、環は除法を除いた、加法、減法、乗法の３種類の演算が定義される。

② 零元
環の加法単位元を零元といい、oで表す。

③ 可換環
乗法に関して可換である（交換律を満たす）環を可換環という。すなわち、$\forall x, y \in R$に対して、$x \cdot y = y \cdot x$が成り立つ。

④ 単位元をもつ環
乗法単位元eを持つ環を単位元を持つ環という。すなわち、$\forall x \in R$に対して、$x \cdot e = e \cdot x = x$となる乗法単位元が$e \in R$である。

(例) 単位元を持つ環

整数全体の集合…整数環

(注) 整数の集合上には、割り算は定義できない (有理数になる)