情報数学 I

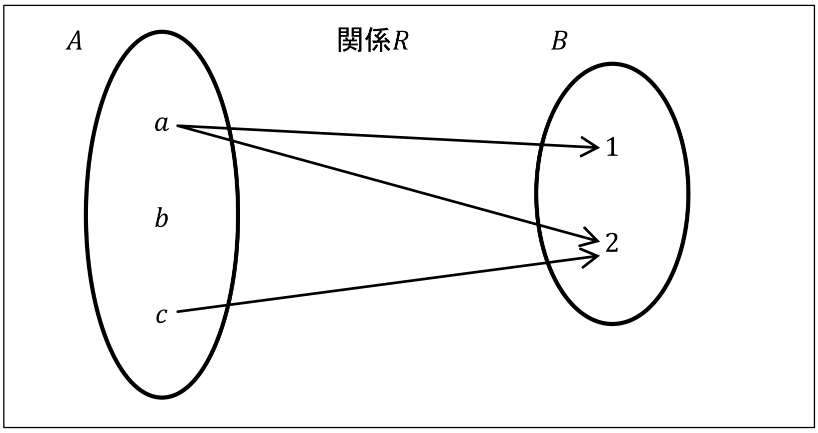
第 4 回「関係-同値関係と分割」

§ 2.1.3 関係の表現

① 関係グラフ

集合間で関係のある要素を矢印で結んだグラフ

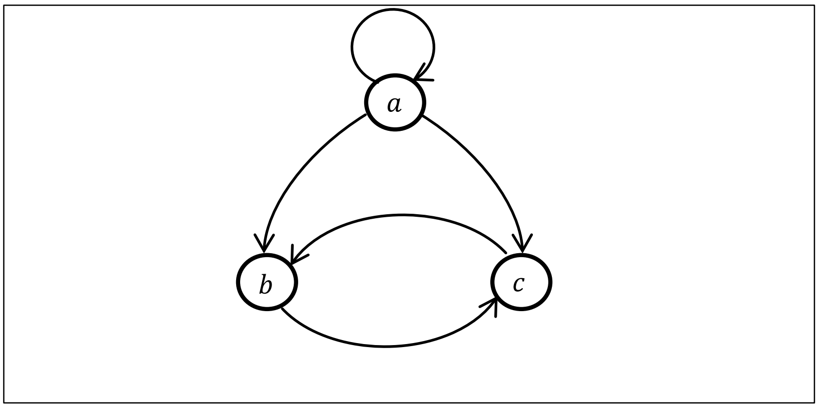
例) $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}, R=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$



② 有向グラフ

集合内の要素の関係を表現するグラフ

例) $A=\{a,b,c\}, R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$



③ 関係行列

$A=\{a_1,\cdots,a_m\}, B=\{b_1,\cdots,b_n\}$, 関係$R\subseteq A\times B$に対し、$(i,j)$ 成分が $r_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$

で定義されたm行n列の行列

$$M_R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

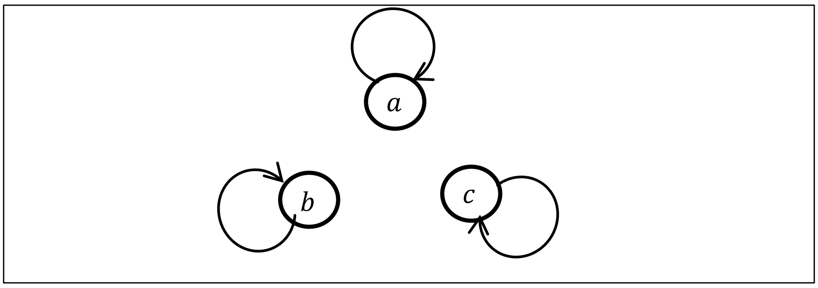
例） $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2\}, R = \{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

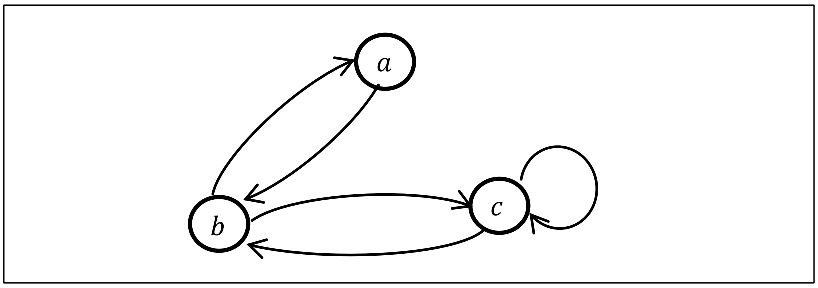
§2.1.4 同値関係

〇集合A上の関係Rの特別な性質

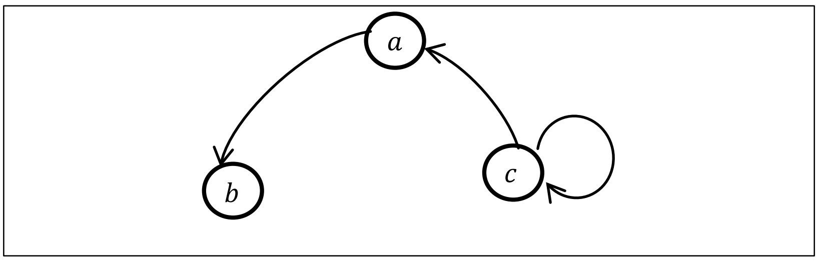
(1) $\forall a \in A$に対し、aRaが真であるとき、関係Rは反射的である、という。(反射律)



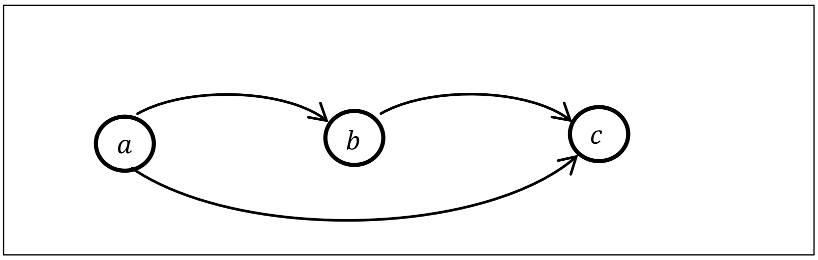
(2) $\forall a, b \in A$に対し、$aRb \Rightarrow bRa$が真であるとき、関係Rは対称的である、という。(対称律)



(3) $\forall a, b \in A$に対し、$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$が真であるとき、関係$R$は反対称的である、という。(反対称律)



(4) $\forall a,b,c \in A$に対し、$aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$が真であるとき、関係$R$は推移的である、という。(推移律)



(例)

①人間の集合T上の“友人である”という関係Rの性質を調べよ。

②人間の集合T上の“親子である”という関係Rの性質を調べよ。

③工学部の学生の集合S上の“同学科の学生である”という関係 R の性質を調べよ。

④集合の包含関係の性質を調べよ。

⑤集合の等号関係の性質を調べよ。

関係	反射的	対称的	反対称的	推移的
友人関係	○	○	×	×
親子関係	×	○	×	×
同学科の学生	○	○	×	○
包含関係 ⊆	○	×	○	○
等号関係 =	○	○	○	○

○同値関係と分割

同値関係 (equivalence relation): 集合S上の関係Rが反射的かつ対称的かつ推移的であるとき、この関係Rを同値関係という。

分割(partition)、細胞 (cells): 集合Sの重複しない空でない部分集合S_iの細分を集合Sの分割といい、この部分集合S_iを細胞という。

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n, \qquad S_i \cap S_j = \phi \ (i \neq j)$$

同値類、商: 関係Rを集合S上の同値関係とする。$a \in S$に対し、aと同値関係にある要素の集合を、「aのRによる同値類」といい、C_aまたは$[a]$で表す。aは同値類C_aの代表元という。

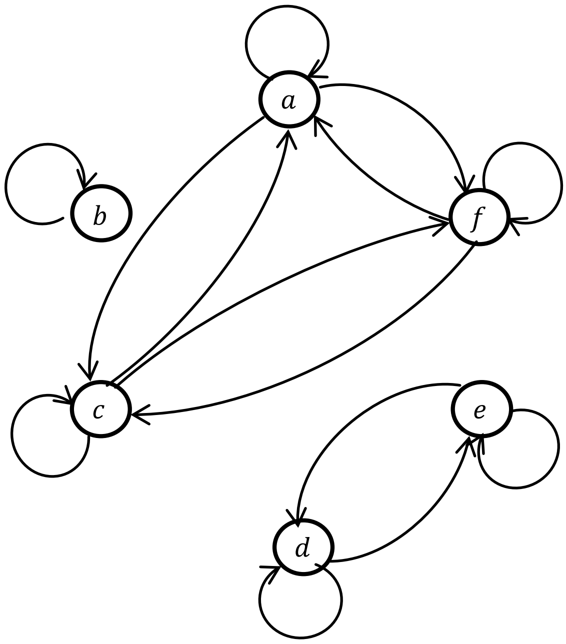
$$C_a = \{x | xRa, x \in S, a \in S\}$$

また、Sの同値類の集合を同値関係Rによる集合Sの商といい、S/Rで表す。

$$S/R=\{C_a|a\in S\}$$

『集合Sを同値関係Rによって同値類に分割する』

例）$A=\{a,b,c,d,e,f\}$,A上の関係$R=\{(a,a),(a,c),(a,f),(b,b),(c,a),(c,c),(c,f),$
$(d,d),(d,e),(e,d),(e,e),(f,a),(f,c),(f,f)\}$



同値類

$C_a=\{a,c,f\}$

$C_b=\{b\}$

$C_d=\{d,e\}$

RによるAの商

$A/R=\{C_a,C_b,C_d\}$