

情報数学 I

第 3 回 「関係, 関係の性質」

§ 2.1 関係 (relation)

§ 2.1.1 直積集合

n -項組 (n -tuple): n 組の要素 a_1, a_2, \dots, a_n を順序に意味を持たせて並べたものをサイズが n の系列または n -項組といい、 (a_1, a_2, \dots, a_n) で表される

[定義] 等しい n -項組(等しい系列)

二つの n -項組 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対し、 $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ であるとき、この二つの n -項組は等しいという。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ と書く。

直積集合 (cartesian product): A, B を集合とすると、 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を集合 A と集合 B の直積集合という。この要素は順序対で表される。

n 個の集合の直積集合は

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

この集合の要素はサイズが n の系列である

(例) $A = \{0, 1\}$ $B = \{a, b, c\}$ の直積集合 $A \times B$ と $B \times A$ を求めよ

解) $A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$

$B \times A = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

一般に $A \times B \neq B \times A$

§ 2.1.2 関係

工学部の学生の集合を S とする。 $a, b \in S$ に対して、“ a は b と同県人である”という関係 R を考える。 a は b と同県人であるか、または、 a は b と同県人ではない、のどちらかである。

関係は、「 a は b と \sim 関係にある」かまたは「 a は b と \sim 関係にない」のどちらかである

『関係は考えている集合の二つの要素間にある結びつきがあるかないかを考えている』

関係: A, B を集合とする。 $A \times B$ の任意の部分集合 $R \subseteq A \times B$ を A から B への関係という。特に $A = B$ であるとき **集合 A 上の関係** という。

$R \subseteq A \times B$ を関係とすると、 $x \in A, y \in B$ に対して、 $(x, y) \in R$ を “ x は y と関係 R にある” といひ、 xRy で表す。

$(x, y) \notin R$ を “ x は y と関係 R にない” といひ、 $x \not R y$ で表す。

(例) 整数の集合 $A = \{15, 4, 9\}$ $B = \{5, 2\}$ とする。集合 A から集合 B への関係 R を “ a は b の倍数である” とするとき、 R と \bar{R} を求めよ。

(解) $A \times B = \{(15, 5), (15, 2), (4, 5), (4, 2), (9, 5), (9, 2)\}$

$$R = \{(15, 5), (4, 2)\}$$

$$\bar{R} = \{(15, 2), (4, 5), (9, 5), (9, 2)\}$$

$$R \cup \bar{R} = A \times B$$

『この関係 R を定義すると、2 つの集合間あるいは 1 つの集合に構造を与えることとなる』
⇒関係データベース

逆関係: “ a は b と関係 R にある” が真であるとき、“ b は a と関係 R^{-1} にある” が真となる。 R^{-1} を関係 R の逆関係という。

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R, a \in A, b \in B\}$$

(例)

“ a は b の倍数である” という関係 R の逆関係 R^{-1} を求めよ

(解) “ b は a の約数である” が逆関係である