情報数学 I

第 2 回「集合、集合の演算」

§1.1 集合 (set)

集合､要素あるいは元: 人類のみんなが同じと認めるある共通した特徴によって統一できる対象の集まりを集合といい、その対象を要素あるいは元という

(例)

①偉大な数学者の集合…数学の集合ではない

②フィールズ賞を受賞した数学者の集合…数学の集合である

〇集合を定義する方法

①集合の要素を全て列挙する (外延的記法、枚挙法)

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

(注) 集合の括弧は$\{\ \}$を使用する

系列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$

系列の括弧は$(\ )$または$[\ ]$を使用する

系列は、要素の順序に意味をもたせている。

集合は要素の順序に意味を持たせていない。

すなわち、$(a, b) \neq (b, a)$ であり $\{a, b\} = \{b, a\}$ である。

(注) 集合の要素は重複してはいけない。重複を許す集まりは多重集合と呼ばれる。

② 述語$P(x)$ を満たすxの集合 (内包的記法)

$\{x | P(x)\}$

↑such that の意味

$\{x | P(x), F(x)\}$ 述語$P(x)$を満たしかつ述語$F(x)$を満たすxの集合

(注) カンマ, は「かつ(∧)」と同じ意味である。

(例) 要素が 0,1,2,3 である集合

① $\{0,1,2,3\}$

② $\{x | x \in \mathbb{Z}\,(\text{整数の集合}), 0 \leq x \leq 3\}$

③ 全体集合(universal set)と空集合 (empty set)

対象としているもの全体を全体集合といい、Uで表す。要素のない集合を空集合といい、ϕ (ギリシャ文字のファイ)で表す.

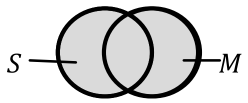
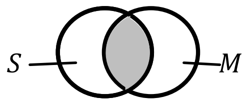
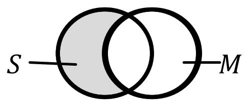
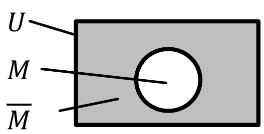
〇数の集合を表す記号

$\mathbb{N}$ (自然数全体の集合),　$\mathbb{Z}$ (整数全体の集合),　$\mathbb{Q}$ (有理数全体の集合),
$\mathbb{R}$ (実数全体の集合),　$\mathbb{C}$ (複素数全体の集合)

〇集合の要素、集合の比較

	記法	集合の定義	意味
集合の要素	$a \in S$		aは集合Sに属する
	$a \notin S$		aは集合Sに属さない
部分集合	$S \subseteq M$ $S \subset M$ (真部分集合)	$\forall x\ [x \in S \Rightarrow x \in M]$	集合Sは集合Mの部分集合である
等しい集合	$S = M$	$S \subseteq M \land M \subseteq S$	集合Sは集合Mと等しい
比較可能な集合		$S \subseteq M \lor M \subseteq S$ (SとMのどちらかが部分集合)	集合SとMは比較可能である
比較可能でない集合		$S \nsubseteq M \land M \nsubseteq S$ (SとMはどちらとも部分集合になっていない)	集合SとMは比較可能でない

〇集合の演算

集合の演算	記法	集合の定義	ベン図
和集合	$S \cup M$	$\{x \mid x \in S \lor x \in M\}$	
積集合	$S \cap M$	$\{x \mid x \in S, x \in M\}$	
差集合	$S - M$	$\{x \mid x \in S, x \notin M\}$	
集合Mの補集合 Complement	$\overline{M}$ (またはM^c)	$\overline{M} = U - M$ $\{x \mid x \in U, x \notin M\}$ U: 全体集合	

(注) 論理和$X \lor Y$と和集合$S \cup M$は異なる。論理積$X \land Y$と積集合$S \cap M$は異なる

〇集合の性質

(1) ベキ等律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(2) 結合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 交換律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(4) 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(5) 恒等律

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$

(6) 補集合律

$$A \cup \bar{A} = U$$
$$A \cap \bar{A} = \phi$$
$$\bar{\bar{A}} = A \qquad \because \bar{\bar{A}} = \overline{U - A} = U - (U - A) = A$$
$$\bar{U} = \phi$$
$$\bar{\phi} = U$$

(7) ド・モルガン律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(8) 吸収律

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

〇要素の個数

有限集合Aの要素の個数を記号$n(A)$(または$|A|$、$\#A$)で表す

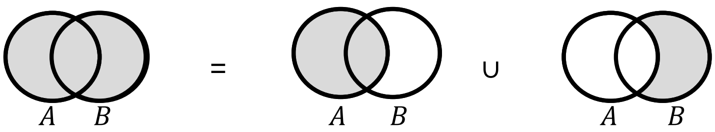
(例)アラビア数字の集合$A=\{0,1,2,\cdots,9\}$ に対し、$n(A)=10$

[定理]

A,Bを有限集合とする。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$が成り立つ。

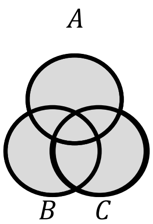
(説明)



[定理]

A,B,Cを有限集合とする。

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ が 成り立つ



(説明)

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C)&=n(A\cup B)+n(C)-n\big((A\cup B)\cap C\big)\\
&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)\\
&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$