情報数学 I

第 14 回「いろいろなグラフ 2：オイラーグラフとハミルトングラフ」

§5.2.2 オイラーグラフとハミルトングラフ

〇オイラーグラフ

周遊小道：各辺を一度ずつ通る小道

オイラー小道：閉じた周遊小道

オイラーグラフ：オイラー小道を持つグラフ

すべての辺を通る一筆書きができるかどうか、という問題。

(オイラーの定理)　連結グラフGに対し、次が成り立つ。(これは必要十分条件)

周遊小道を持つ ⇔ 奇頂点が 0 か 2

オイラー小道を持つ ⇔ 奇頂点が 0

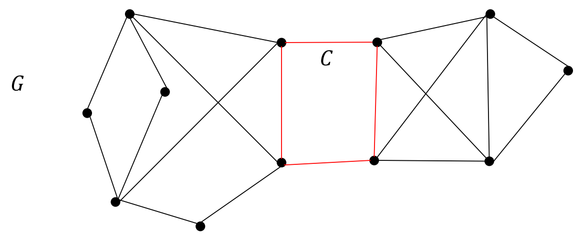
(オイラー小道に関する証明)

(⇒) オイラー小道であれば各頂点には、入る辺と出る辺を同数持つため必ず偶頂点となる。

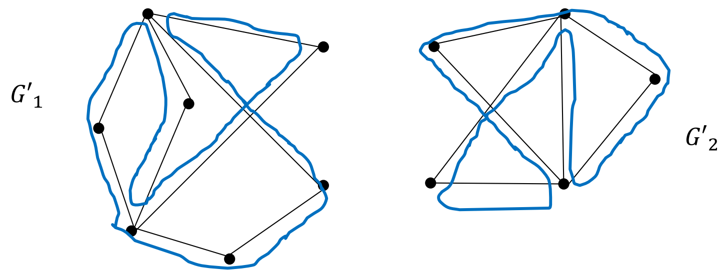
(⇐) $G = (V, E)$としたとき、$q = |E|$に関する数学的帰納法で証明。

$q \leq 2$のときは明らかに成り立つ。

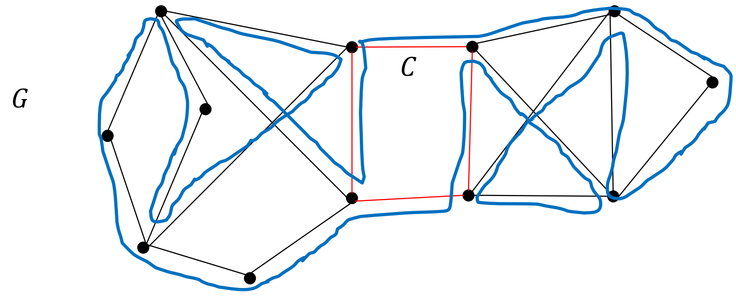
$q > 2$のとき、$q-1$以下では成り立っているとする。グラフGの任意の点Pを一つ選択する。Pを始点とする任意の閉路Cをつくる。GからCを構成する辺を取り除いてできるグラフG'はすべて偶頂点であり、かつ、$q-1$以下のサイズとなるため、G'はすべてオイラー小道を持つ。各G'とCは共有する頂点を持つため、Cを辿るときにその共有する頂点からG'を辿ってCに戻ってくればCもG'も一度ずつ辿ることができる。したがって、qに対するオイラー小道を作ることができる。



グラフGから閉路Cを除くと次のG'_1とG'_2ができる。それぞれ帰納法の仮定よりオイラー小道が必ず存在する。



Cを巡回する途中で各々のグラフを巡回すればGに対するオイラー小道ができる。



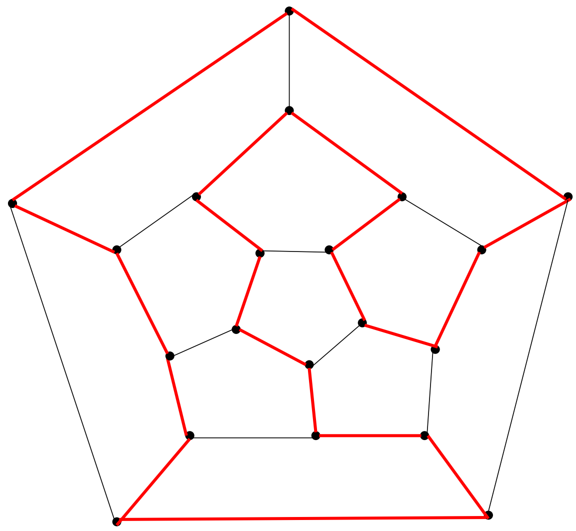
□

〇ハミルトングラフ

ハミルトン閉路: 各頂点を一度ずつ通る閉じた小道

ハミルトングラフ: ハミルトン閉路を持つグラフ

(例) 正 12 面体とそのハミルトン閉路



必要十分条件は未解決問題

(オアの定理) 頂点数pが$p \geq 3$となるグラフGに対し、隣接しない任意の 2 頂点P, Q $(P \neq Q)$に対し、$d(P) + d(Q) \geq p$が成り立つ⇒ Gはハミルトングラフ

(例)

任意の正整数nについて$K(n, 2n, 3n)$はハミルトングラフ

頂点数pに対し、$p \geq 3$, (Gの最小次数) $\geq p/2$ならハミルトングラフ