

情報数学 I

第 13 回「いろいろなグラフ 1: 完全グラフ、 n 部グラフ、木 グラフ、平面グラフ」

§ 5. 1. 3 いろいろなグラフ

○完全グラフと正則グラフ

n 次の正則グラフ: 各頂点の次数が等しいグラフを正則グラフという。次数 n の正則グラフを n 次の正則グラフという。最小次数 = 最大次数 = n 。

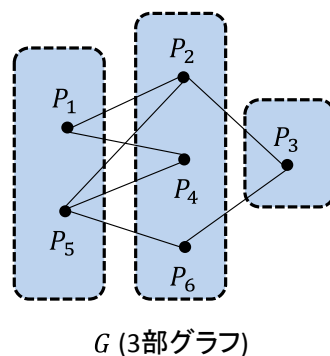
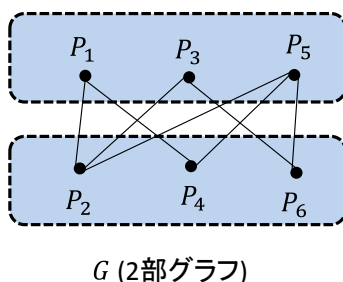
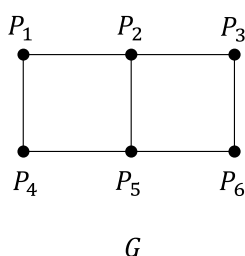
完全グラフ: どの 2 頂点間も隣接しているグラフ。 n 頂点の完全グラフを K_n と表す。

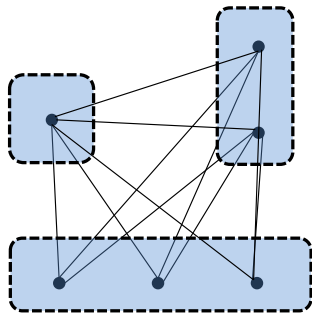
○ n 部グラフ

n 部グラフ: $G = (V, E)$ において、頂点集合を n 個に分割でき ($V = V_1 \cup \dots \cup V_n$, $V_i \cap V_j = \phi$ ($i \neq j$), $V_i \neq \phi$)、両端点が同じ V_i の要素であるような辺が存在しないならば、 G は n 部グラフと呼ばれる。

完全 n 部グラフ: n 部グラフ G において、任意の $i \neq j$ に対して、 V_i のどの頂点と V_j のどの頂点も隣接しているとき、 G は完全 n 部グラフと呼ばれる。 $|V_i| = p_i$ であるとき、このグラフを $K(p_1, \dots, p_n)$ もしくは K_{p_1, \dots, p_n} と表す。

(例)





$K(1,2,3)$

○木グラフ

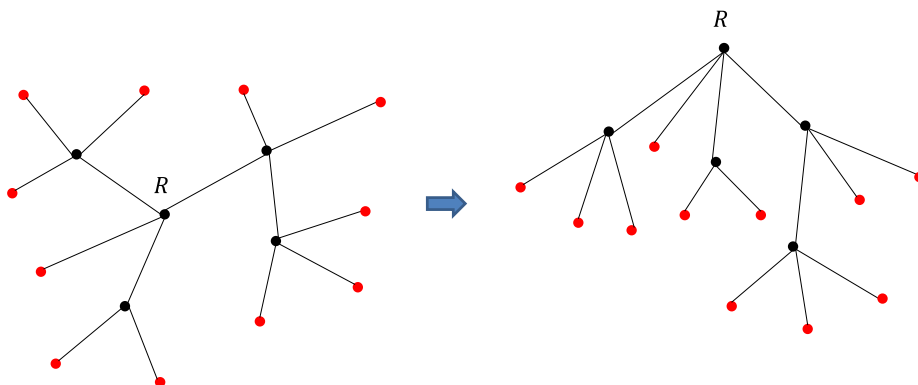
木グラフ：連結な無閉路グラフ

(定理) G を (p, q) グラフとする。次の (1) ~ (6) は同値である。

- (1) G は木グラフである。
- (2) G のどの 2 頂点間にも道がちょうど 1 つだけ存在する。
- (3) G は連結で、 G のどの辺も橋である。
- (4) G には閉路がなく、 G の隣接しない 2 頂点間のどこに辺を付け加えても閉路ができる。
- (5) G は連結で、 $p = q + 1$ である。
- (6) G には閉路がなく、 $p = q + 1$ である。

全域木：グラフ G の部分グラフ T が G のすべての頂点を含む木グラフであるとき、 T を G の全域木という。

根付き木：特別な頂点が一つ定められている木グラフを根付き木といい、特別な頂点を**根**という。根以外の度数 1 の頂点を**葉**という。辺のことは**枝**ともいう。根からの道の長さを**深さ**という。



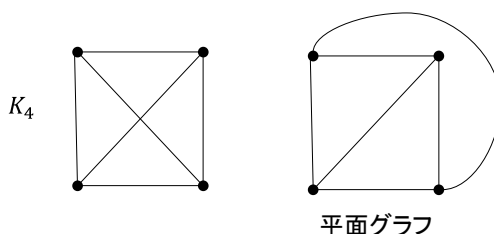
木グラフは、根 (R) をつまんでもちあげた図で書くことが多い。赤い頂点は葉。

§ 5.2 平面的グラフ

§ 5.2.1 平面的グラフ

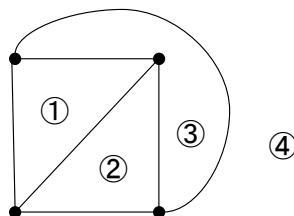
平面グラフ：辺が交わらないグラフ

平面的グラフ：平面グラフと同型なグラフ。頂点と辺をうまく配置することによって辺が交わらなくなる。



K_4 は平面的グラフ

領域：平面グラフは辺によって囲まれたいくつかの領域に分けられる。



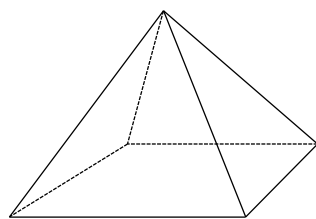
①②③④は平面グラフ K_4 の領域

(オイラーの公式) 任意の連結な平面グラフ G に対して $p - q + r = 2$ が成り立つ。ただし、 p, q, r はそれぞれ G の頂点数、辺の本数、領域の個数である。

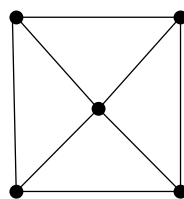
(例) K_4 の場合、 $p = 4, q = 6, r = 4$ であるから、 $4 - 6 + 4 = 2$

○オイラーの多面体公式

どの多面体 P でも、 P の頂点を頂点とし、 P の稜を辺とする平面グラフを対応させることができる。したがって、 V, E, F をそれぞれ多面体 P の頂点数、稜の個数、面の個数としたとき、 $V - E + F = 2$ が成り立つ。



5面体



5面体の平面グラフ

正多面体は正 4, 6, 8, 12, 20 面体に限られる。

○平面グラフの頂点数と辺数

頂点数 $p \geq 3$ 、辺数 q 、領域数 r の連結平面グラフを考える。

(定理) $q \leq 3p - 6$ が成り立つ。

すべての領域は 3 本以上の辺で囲まれていることと、どの辺も高々 2 つの領域の境界になっていることより、 $2q \geq 3r$ 。オイラーの公式より、 $q \leq 3p - 6$ が成り立つ。

(定理) K_5 は平面的グラフではない。

K_5 は $p = 5, q = 10$ だから $q \leq 3p - 6$ を満たさない。したがって、 K_5 は平面的グラフではない。

(定理) $K(3,3)$ は平面的グラフではない。

$K(3,3)$ が平面的だとすると、各領域は 4 本以上の辺で囲まれるので、 $2q \geq 4r$ 。オイラーの公式より $q \leq 2p - 4$ が成り立つが、 $K(3,3)$ はこの不等式を満たさない。したがって、 $K(3,3)$ は平面的グラフではない。

(クラトウスキーの定理) 単純グラフが平面的であるための必要十分条件は、 K_5 または $K(3,3)$ の辺上に頂点を付け加えた形の部分グラフ(同相なグラフ)を含んでいないことである。

$K_n(n \geq 5)$ 、 $K(l, m)(l \geq 3, m \geq 3)$ もそれぞれ K_5 または $K(3,3)$ を部分グラフとして含むため平面的グラフではない。