情報数学Ⅰ

第 11 回「経路」

§5.1.2 経路

経路(walk)：グラフGの頂点と辺が交互に現れる有限な列$W = P_0 e_1 P_1 e_2 P_2 \cdots e_n P_n$を経路または歩道という。

・P_0を始点、P_nを終点といい、WをP_0-P_n経路という。
・辺数nを経路Wの長さといい、$|W| = n$または$l(W) = n$と書く。
・$P_0 = P_n$のとき、Wは閉じているという。
・単純グラフに対しては、経路Wを$P_0 P_1 P_2 \cdots P_n$と書く。
・経路$W_1 = P \cdots Q$と経路$W_2 = Q \cdots R$をつなげてできる経路$P \cdots R$を$W_1 W_2$と書く。

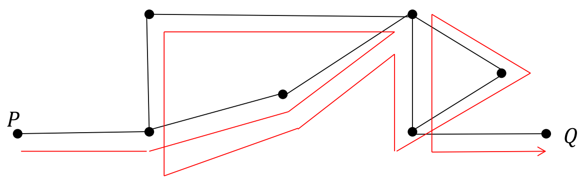
小道(trail)：同じ辺を通らない経路

道(path)：同じ頂点を通らない経路

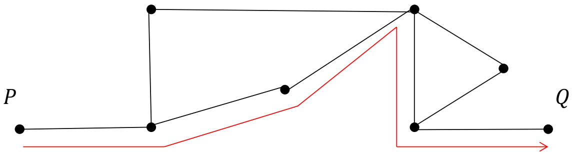
閉路(cycle)：閉じている道を閉路またはサイクルという。長さnの閉路をn-閉路という。

(注) 経路を道という場合もあり、その場合、小道は単純道と呼ばれ、上記の道は基本道と呼ばれる。

(定理) どんなP-Q経路もP-Q小道を含み、どんなP-Q小道もP-Q道を含んでいる。

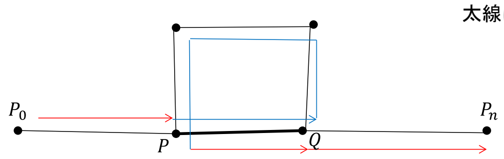


P-Q経路

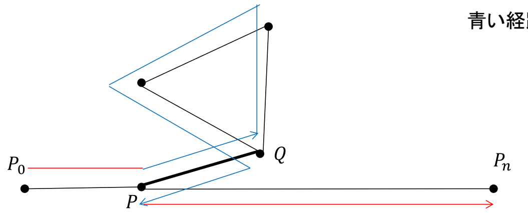


P-Q道

証明の概略：小道でない場合。重複のある辺をPQとする。次の図のように順方向に重複する場合と逆方向に重複する場合の二通りがある。



太線は重複のある辺



青い経路をP_0P_n経路から取り除く

それぞれの場合において青い経路を除去すればPQの重複を除去できる。グラフのサイズは有限なのでこれを繰り返すことですべての重複辺を除去できる。したがって、どんな経路も小道を含む。

　次に、道でない小道なら、重複して通る頂点が存在し、それに接続する閉路が存在する。小道からこの閉路を削除することでこの重複を除去できる。グラフのサイズは有限なのでこれを繰り返すことですべての重複頂点を除去できる。したがって、どんな小道も道を含む。

（定理）全ての頂点の次数が2以上である有限グラフは必ず閉路を含む。
証明の概略：教 p. 141 参照。

〇隣接行列と経路の数
隣接行列Aに対し、

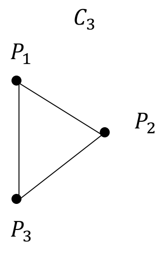
$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{個}}$$

とし、A^nの(i,j)成分を$a_{ij}^{(n)}$と書く。

（定理）グラフ$G=(\{P_1,\cdots,P_p\},E)$とし、その隣接行列をAとする。A^nの(i,j)成分$a_{ij}^{(n)}$はGにおける長さnの相異なるP_iP_j経路の個数である。

単純グラフについては次の性質が成り立つ。
(1) $a_{ii}^{(2)} = d(P_i)$
(2) $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{p} a_{ii}^{(3)}$は$G$における相異なる 3 辺形の個数である。
(3) $p \geq 2$のとき、Gが連結（Gのどの 2 頂点間にも経路がある）$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{p-1} A^n$のどの成分も正。

（例）



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}, A^2=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{bmatrix}$$

〇距離

距離 $d(P,Q)$：P−Q経路の長さの最小値のことを頂点PとQの間の距離といい、$d(P,Q)$と書く。

任意の$P,Q,R\in V$に対し次が成り立つ。

(ｉ)　　$d(P,Q)\geq 0$

(ｉｉ)　　$d(P,Q)=0 \Leftrightarrow P=Q$

(ｉｉｉ)　　$d(P,Q)=d(P,Q)$

(ｉv)　　$d(P,Q)+d(Q,R)\geq d(P,R)$　（三角不等式）

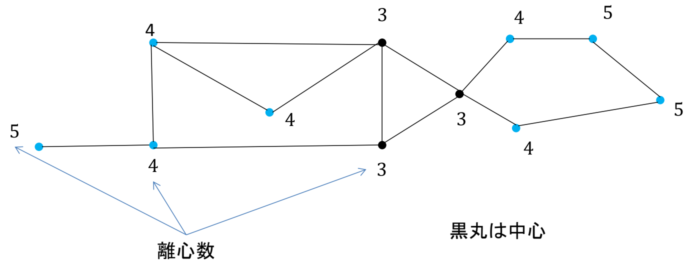
離心数 $e(P)$：$P\in V$に対し、Pからもっとも遠い頂点までの距離を離心数という。$e(P)=max\{d(P,Q)|Q\in V\}$

直径 $diam(G)$：グラフGのすべての頂点の離心数のうちの最大値をGの直径という。$diam(G)=max\{e(P)|P\in V\}$

半径 $rad(G)$：グラフGのすべての頂点の離心数のうちの最小値をGの半径という。$rad(G)=min\{e(P)|P\in V\}$

中心：$e(P)=rad(G)$である頂点PをGの中心という。中心は一つとは限らない。

（例）



$rad(G)=3, diam(G)=5$