

情報数学 I

第 1 回「情報数学とは？命題，述語，論理記号」

・教科書

やさしく学べる離散数学 ISBN 9784320018464

石村 園子 共立出版 2007 年

・参考書

情報の基礎離散数学—演習を中心とした ISBN 9784764902763

小倉 久和 近代科学社 1999 年

・講義ウェブページ

<http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/im1/>

序論

“情報数学(離散数学)”とは

デジタル計算機科学で扱われる数学⇒有限で離散的対象を扱う数学

デジタル計算機

有限個の演算素子 } 構成されている
有限個のメモリー素子 }

扱うことができる記号は 0 と 1 のみである。⇒ 有限でかつ離散的な量（記号）を扱う。

[問題]

$$\max 2x + xy$$

$$\text{s. t. } x + y = 1$$

[解]

$$2x + xy = 2x + x(1 - x) = 3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

よって、 $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$ のとき、最大値 $\frac{9}{4}$

$x \in \{0,1\}, y \in \{0,1\}$ だとどうなるだろう？ $x + y = 1$ より次の二通りしかない

$$2x + xy = 0 \quad (x = 0, y = 1)$$

$$2x + xy = 2 \quad (x = 1, y = 0)$$

よって、 $x = 1, y = 0$ のとき、最大値 2

[問題] 100 の変数で構成される関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ の値をすべて求めよ。ただし、各 $x_i \in \{0,1\}$

[解]関数の値の表を求めるのに必要な計算時間を以下に求める。1 種類の変数パターンに対する関数値を求めるのに必要な時間は 10^{-10} 秒とする。全ての変数のパターンは 2^{100} 種類ある。全てのパターンに対する関数値を求めるのに必要な時間は $10^{-10} \times 2^{100} \doteq 10^{20}$ (秒) $\doteq 3 \times 10^4$ 億年 “実際には計算不可”

§ 1 集合と論理

§ 1.2 論理

○命題、述語、論理記号

定義 (definition): 概念の内容を限定すること。一意かつ変化しない。

“定義は人間が決めたもの”

“学問は定義から始まる”

叙述: ある事実を述べたもの。(真 or 偽 or 真か偽かわからない)

(例)

- ・みみずは移動するとき空を飛ぶ (偽)
- ・人間には必ず背後霊がいる (真か偽かわからない)
- ・複素数の集合は実数の集合を包含している (真)

命題: 内容の真偽が確定している叙述を命題という。“真” “偽”を値と考え、“真”を“T”または“true”または“1”で表し、“偽”を“F”または“false”または“0”で表し、これを真理値(論理値)という。

(例)

命題	真理値
月にはうさぎが生息している	F
犬は動物である	T
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	T

述語: 叙述 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が含むすべての変数 x_1, x_2, \dots, x_n に具体的値を与えると命題となる叙述を述語という。

(例)

① 述語 $P(x)$: x は動物である

$$P(\text{犬}) = \text{T}, P(\text{猫}) = \text{T}, P(\text{木}) = \text{F}$$

② $x, y, r \in \mathbb{R}_+$ (正の実数の集合) のとき

$$P(x, y) = \begin{cases} \text{T} & (x^2 + y^2 = r^2) \\ \text{F} & (x^2 + y^2 \neq r^2) \end{cases}$$

述語 $P(x, y)$ の意味

(x, y) は半径が r である円周上の点である

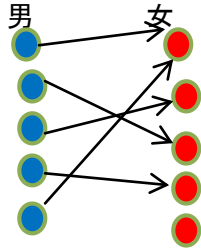
○論理記号と論理演算

名前	記号	使用法	意味
全称記号	\forall	$\forall x F(x)$	任意の x に対して述語 $F(x)$ が成り立つ (全ての x に対して $F(x)$ が成り立つ)
存在記号	\exists	$\exists x F(x)$	$F(x)$ が成り立つような x が存在する ($F(x)$ が成り立つような x が少なくとも1つ存在する)
否定	\neg, \sim	$\neg A$	A は成立しない
論理積	\wedge	$A \wedge B$	A かつ B が成立
論理和	\vee	$A \vee B$	A または B が成立
含意	\Rightarrow	$A \Rightarrow B$	A が成り立つならば B も成り立つ ($\neg A \vee B$) A は B が成り立つための十分条件 B は A が成り立つための必要条件
同値	\Leftrightarrow	$A \Leftrightarrow B$	A と B は同値である ($A \Rightarrow B$) \wedge ($B \Rightarrow A$) A は B が成り立つための必要十分条件 B は A が成り立つための必要十分条件

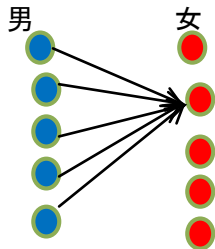
(例)

① \forall と \exists の順番によって意味が変わる

$\forall x \in \text{男} \exists y \in \text{女} \quad x \text{は} y \text{を愛している}$



$\exists y \in \text{女} \forall x \in \text{男} \quad x \text{は} y \text{を愛している}$



② $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 1$

(注) \mathbb{Z} は整数の集合

(注) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, x + y = 1$ は成り立たない

③ $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, xy = y$

(注) $x = 1$

④ 数列 a_n が a に収束する ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

○命題、述語に関する重要な定理 (次の論理式は恒に真)

(二重否定) $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(分配律) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(ド・モルガン律) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(限量子と否定の入れ替え) $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$ $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

(限量子の入れ替え) $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$ $\exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$

(三段論法) $(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

(対偶) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

(背理法) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$