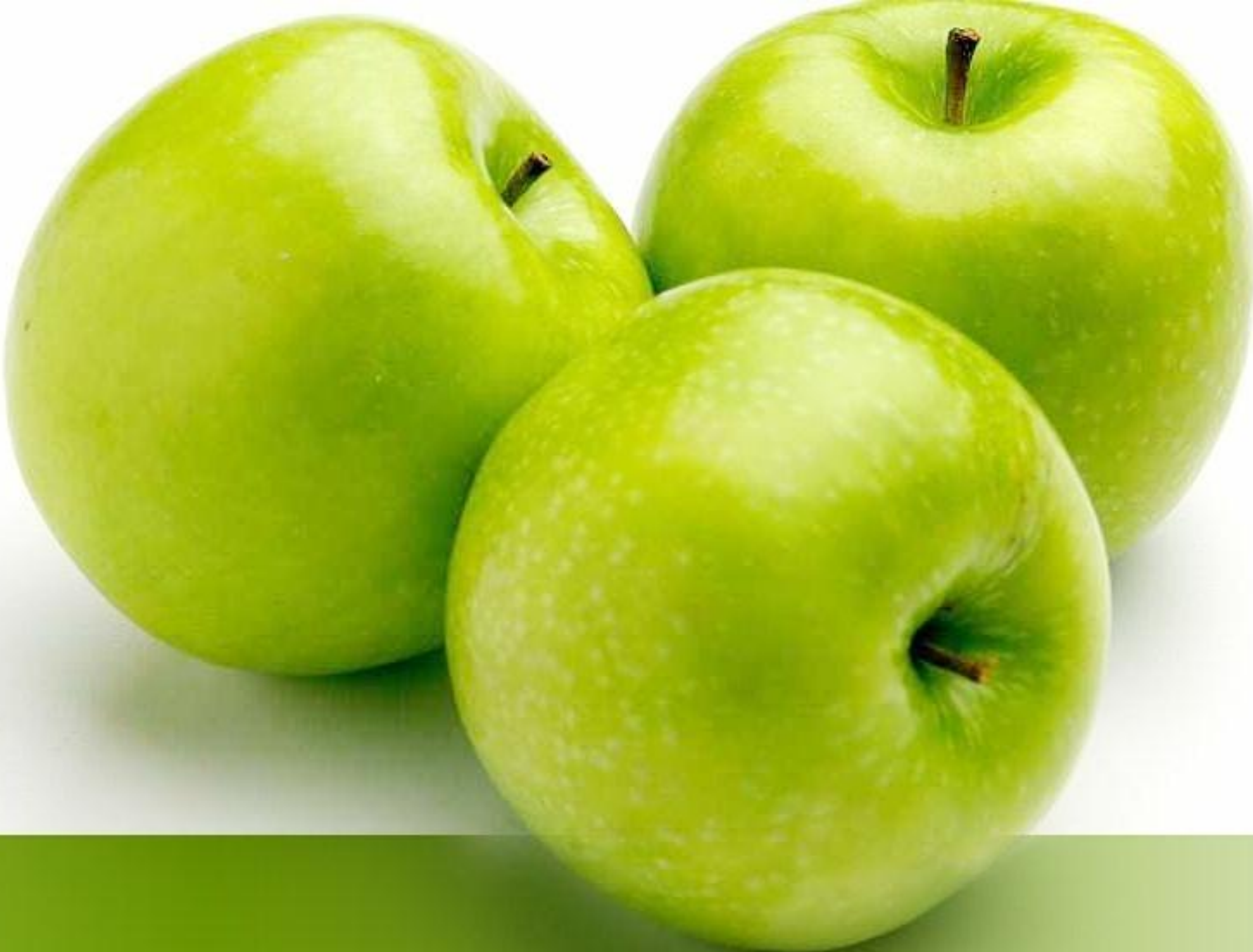


人工知能特論II　第9回

二宮 崇

今日の講義の予定

- EMアルゴリズム
  - EMアルゴリズムの別の導出法と理解
  - 混合モデルのEMアルゴリズム
  - HMMのEMアルゴリズム
- 教科書
  - 北研二(著) 辻井潤一(編) 言語と計算4 確率的言語モデル 東大出版会
  - C. D. Manning & Hinrich Schütze “FOUNDATIONS OF STATISTICAL NATURAL LANGUAGE PROCESSING” MIT Press, 1999
  - Christopher M. Bishop “PATTERN RECOGNITION AND MACHINE LEARNING” Springer, 2006

ジェンセンの不等式

ジェンセンの不等式

- 凸関数 $f(x)$ は区間 I 上の実数値関数
- $p_1,p_2,\ldots,p_n$は$p_1+p_2+\ldots+p_n=1$を満たす非負の実数
- 任意の$x_1,x_2,\ldots,x_n \in$ I に対し次の不等式が成り立つ

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \geq f(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)$$

- $f(x) = -\log(x)$、$x_i = q_i / p_i$とおくと

$$\sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geq -\log\left(\sum_i p_i \frac{q_i}{p_i}\right) = -\log \sum_i q_i = 0$$

EMアルゴリズムの全体像

$$\tilde{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta)$$

問題変形

$$\theta^{(i+1)} = \arg\max_{\theta} Q(\theta^{(i)}, \theta)$$

個々の問題に応じて決まるQ関数の極値を解析的に求める

個々の問題によって決まるパラメータ更新式

[Eステップ] $p(y \mid x ; \theta)$ を計算

[Mステップ]

$$\theta^{(i+1)} = \arg\max_{\theta} Q(\theta^{(i)}, \theta)$$

によりパラメータ更新

EMアルゴリズムの別の導出法と理解

EMアルゴリズムの別の導出法と理解　1/3

- パラメータ: $\boldsymbol{\theta}$
- 入力: $\mathbf{x}$
- 隠れ状態: $\mathbf{y}$
- 観測データ: $X=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$
- 対数尤度: $\log p_{\boldsymbol{\theta}}(X)$

$$
\begin{aligned}
\log p_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \{ \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) - \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \{ \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) - \log q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) - \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) + \log q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \left\{ \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)}{q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)} - \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)}{q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)}{q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)}{q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)}
\end{aligned}
$$

EMアルゴリズムの別の導出法と理解　2/3

- パラメータ: $\boldsymbol{\theta}$
- 入力: $\mathbf{x}$
- 隠れ状態: $\mathbf{y}$
- 観測データ: $X=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$
- 対数尤度: $\log p_{\boldsymbol{\theta}}(X)$

$$L(q,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y(x_i)} q(y_i \mid x_i) \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(x_i, y_i)}{q(y_i \mid x_i)}$$

$$KL(q \,\|\, p) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{y_i \in Y(x_i)} q(y_i \mid x_i) \log \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(y_i \mid x_i)}{q(y_i \mid x_i)} \geq 0$$

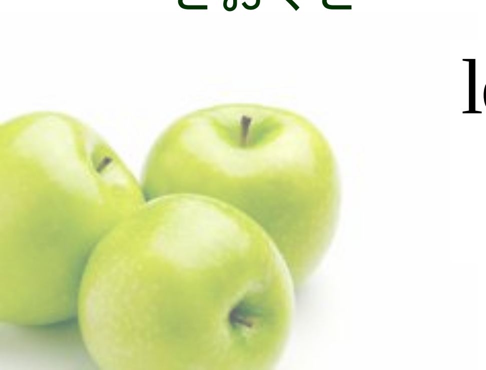
とおくと

$$\begin{aligned} \log p_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= L(q,\boldsymbol{\theta}) + KL(q \,\|\, p) \\ &\geq L(q,\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

ポイント!
前ページのように式を展開するよりもここに

$$\log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) + \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i)$$

を代入して等式が成り立つことを確認するほうがわかりやすい



EMアルゴリズムの別の導出法と理解　3/3

- Eステップ

$$q^{(\tau+1)}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) = \underset{q(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)}{\arg\max}\, L(q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i), \boldsymbol{\theta}^{(\tau)}) = \underset{q(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)}{\arg\min}\, KL(q(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \,\|\, p_{\boldsymbol{\theta}^{(\tau)}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)) = p_{\boldsymbol{\theta}^{(\tau)}}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i)$$

パラメータが固定されているので、$p_{\boldsymbol{\theta}}(X)$ は変わらない
→ Lを最大化 ⇔ KLを最小化

- Mステップ

$$\boldsymbol{\theta}^{(\tau+1)} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max}\, L(q^{(\tau+1)}, \boldsymbol{\theta}) = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{y}_i \in Y(\mathbf{x}_i)} q^{(\tau+1)}(\mathbf{y}_i \mid \mathbf{x}_i) \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)}_{\text{Q関数}}$$

隠れ状態の確率とパラメータを交互に動かして、Lを最大化

EMアルゴリズムによる混合モデルのパラメータ更新

混合モデルのパラメータ更新式導出

- 混合モデル (mixture model)
  - 観測データ$x_1,..,x_n$に対し、それらを生成する複数の隠れ状態$y_1,...,y_m$を仮定
  - いずれかの隠れ状態がλ_j (=$p(y_j)$)の確率で選択され、その隠れ状態から観測データxが$p(x \mid y_j)$の確率で生成されたと考える

$$p(x) = \sum_{j=1}^{m} p(x, y_j) = \sum_{j=1}^{m} p(y) p(x \mid y_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p(x \mid y_j)$$

ただし $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$

混合モデルのパラメータ更新式導出

- 混合モデル (mixture model)

$$p(x)=\sum_{j=1}^{m}p(x,y_j)=\sum_{j=1}^{m}p(y)p(x\mid y_j)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j p(x\mid y_j)$$

ただし $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1$

- Q関数

$$Q(\lambda,\lambda')=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(y_j\mid x_i;\lambda)\log p(x_i,y_j;\lambda')$$

混合モデルのパラメータ更新式導出

- Q関数を最大化するλ'を見つける⇒ラグランジュの未定乗数法

$$\lambda^{(\tau+1)} = \arg\max_{\lambda} Q(\lambda^{(\tau)}, \lambda)$$

$$Q(\lambda, \lambda') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i; \lambda) \log p(x_i, y_j; \lambda')$$

ラグランジュの未定乗数法

- ラグランジュの未定乗数法

$$\arg\max_{\boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ただし} g_1(\boldsymbol{\theta}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{\theta}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{\theta}) - \ldots - \lambda_m g_m(\boldsymbol{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = 0$$

- ラグランジュ関数

$$L(\lambda', \gamma) = Q(\lambda, \lambda') - \gamma \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda'_j - 1 \right)$$

混合モデルのパラメータ更新式導出

- ラグランジュ関数を偏微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(\lambda',\gamma)}{\partial \lambda'_k} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial p(y_j \mid x_i;\lambda)}{\partial \lambda'_k}\log p(x_i,y_j;\lambda') + p(y_j \mid x_i;\lambda)\frac{\partial \log p(x_i,y_j;\lambda')}{\partial \lambda'_k}\right\} - \gamma \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\{p(y_j \mid x_i;\lambda)\frac{\partial \log p(x_i,y_j;\lambda')}{\partial \lambda'_k}\right\} - \gamma \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\{p(y_j \mid x_i;\lambda)\frac{1}{p(x_i,y_j;\lambda')}\frac{\partial p(x_i,y_j;\lambda')}{\partial \lambda'_k}\right\} - \gamma \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(y_k \mid x_i;\lambda)\frac{1}{\lambda'_k\, p(x_i \mid y_k;\lambda')}\, p(x_i \mid y_k;\lambda') - \gamma \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(y_k \mid x_i;\lambda)\frac{1}{\lambda'_k} - \gamma = 0
\end{aligned}
$$

混合モデルのパラメータ更新式導出

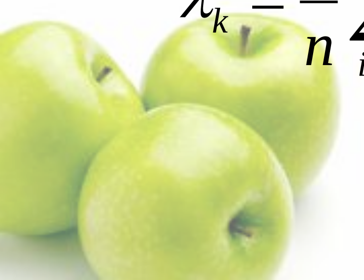
$$\lambda'_k = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n} p(y_k \mid x_i; \lambda)$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_j = 1$であるから$\displaystyle\frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p(y_j \mid x_i; \lambda) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$より$\gamma = n$

$$p(y_k \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)} = \frac{p(x_i, y_k)}{\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)} = \frac{\lambda_k p(x_i \mid y_k)}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p(x_i \mid y_j)}$$

したがって

$$\lambda'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_k p(x_i \mid y_k)}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p(x_i \mid y_j)}$$



HMMの教師無し学習

EMアルゴリズムによるHMMのパラメータ更新

HMMのパラメータ更新式導出

- Q関数

$$
\begin{aligned}
Q(\theta,\theta') &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{y_i} p(y_i \mid x_i;\theta)\log p(x_i,y_i;\theta') \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)\log p(q_1\cdots q_{T_i},o_1\cdots o_{T_i};\theta') \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)\log\left(\pi'_{q_1}\prod_{t=2}^{T_i} a'_{q_{t-1},q_t}\prod_{t=1}^{T_i} b'_{q_t,o_t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)\left(\log\pi'_{q_1}+\sum_{t=2}^{T_i}\log a'_{q_{t-1},q_t}+\sum_{t=1}^{T_i}\log b'_{q_t,o_t}\right)
\end{aligned}
$$

HMMのパラメータ更新式導出

- Q関数のラグランジュ関数

$$
\begin{aligned}
L(\theta,\theta') \;=\; & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\log \pi'_{q_1} + \sum_{t=2}^{T_i} \log a'_{q_{t-1},q_t} + \sum_{t=1}^{T_i} \log b'_{q_t,o_t} \right) + \\
& - \rho \left(1 - \sum_{q \in Q} \pi'_q \right) - \sum_{q \in Q} \alpha_q \left(1 - \sum_{r \in Q} a'_{q,r} \right) - \sum_{q \in Q} \beta_q \left(1 - \sum_{o \in \Sigma} b'_{q,o} \right)
\end{aligned}
$$

ラグランジュ乗数

ρ … 1個の変数

α_q … $|Q|$個の変数

β_q … $|Q|$個の変数

HMMのパラメータ更新式導出

$$\frac{\partial L(\theta,\theta')}{\partial \pi'_q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi'_q} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)[q_1 = q] + \rho = 0$$

$$\pi'_q = \frac{1}{-\rho} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)[q_1 = q] \qquad \cdots(1)$$

$\sum_{q\in Q} \pi'_q = 1$より

$$\frac{1}{-\rho} \sum_{q\in Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)[q_1 = q] = \frac{1}{-\rho} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta) = 1$$

したがって、

$$\rho = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}, o_1\cdots o_{T_i};\theta)}{p(o_1\cdots o_{T_i};\theta)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}, o_1\cdots o_{T_i};\theta)}{\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}, o_1\cdots o_{T_i};\theta)} = -n$$

(1)に代入して、

$$\pi'_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i} \mid o_1\cdots o_{T_i};\theta)[q_1 = q]}{n}$$

HMMのパラメータ更新式導出

$$\frac{\partial L(\theta,\theta')}{\partial a'_{q,r}} = \frac{1}{a'_{q,r}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r = q_t] \right) + \alpha_q = 0$$

$$a'_{q,r} = \frac{1}{-\alpha_q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r = q_t] \right) \qquad \cdots(1)$$

$\sum_{r \in Q} a'_{q,r} = 1$より、$\sum_{r' \in Q} \frac{1}{-\alpha_q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r' = q_t] \right) = 1$、よって、

$\alpha_q = -\sum_{r' \in Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r' = q_t] \right)$。これを式(1)に代入して、

$$a'_{q,r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r = q_t] \right)}{\sum_{r' \in Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i};\theta) \left(\sum_{t=2}^{T_i} [q = q_{t-1}][r' = q_t] \right)}$$

HMMのパラメータ更新式導出

$$\frac{\partial L(\theta,\theta')}{\partial b'_{q,o}} = \frac{1}{b'_{q,o}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o = o_t] \right) + \beta_q = 0$$

$$b'_{q,o} = \frac{1}{-\beta_q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o = o_t] \right) \qquad \cdots(1)$$

$\sum_{o \in \Sigma} b'_{q,o} = 1$より、$\sum_{o' \in \Sigma} \frac{1}{-\beta_q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o' = o_t] \right) = 1$、よって

$-\beta_q = \sum_{o' \in \Sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o' = o_t] \right)$、(1)に代入すると、

$$b'_{q,o} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o = o_t] \right)}{\sum_{o' \in \Sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta) \left(\sum_{t=1}^{T_i} [q = q_t][o' = o_t] \right)}$$

HMMのEMアルゴリズム

1. $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ **:=** 適当な値; $\mathbf{a}^{(0)}$ **:=** 適当な値; $\mathbf{b}^{(0)}$ **:=** 適当な値
2. **[Eステップ]**全ての可能な状態列に対し、$\boldsymbol{\pi}^{(j)}$,$\mathbf{a}^{(j)}$,$\mathbf{b}^{(j)}$を用いて各々の状態列の確率を計算。文に対する各状態列の相対確率を計算。
3. **[Mステップ]** $\boldsymbol{\pi}^{(j+1)}$,$\mathbf{a}^{(j+1)}$, $\mathbf{b}^{(j+1)}$を求める
4. 2.に戻る

HMMのEMアルゴリズム

[Eステップ] $\pi^{(j)}$, $a^{(j)}$,$b^{(j)}$を用いて各状態列の確率を計算。文xに対する各状態列の相対確率を計算。

$$p(q_1 o_1 \cdots q_T o_T ; \theta^{(j)}) = \pi^{(j)}_{q_1} \prod_{t=2}^{T} a^{(j)}_{q_{t-1},q_t} \prod_{t=1}^{T} b^{(j)}_{q_t,o_t}$$

$$p(q_1 \cdots q_T \mid o_1 \cdots o_T ; \theta) = \frac{p(q_1 o_1 \cdots q_T o_T ; \theta)}{p(o_1 \cdots o_T ; \theta)} = \frac{p(q_1 o_1 \cdots q_T o_T ; \theta)}{\sum_{q'_1 \in Q, \cdots q'_T \in Q} p(q'_1 o_1 \cdots q'_T o_T ; \theta)}$$

HMMのEMアルゴリズム

[Mステップ] $\pi^{(j+1)}$を求める

$$\pi_q^{(j+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q_1 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta^{(j)})[q_1 = q]}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_2 \in Q, \cdots, q_{T_i} \in Q} p(q q_2 \cdots q_{T_i} \mid o_1 \cdots o_{T_i}; \theta^{(j)})}{n}$$

$$= \frac{\text{先頭が}q\text{となる回数の期待値}}{n}$$

HMMのEMアルゴリズム

[Mステップ] $\mathbf{a}^{(j+1)}$を求める

$$a_{q,r}^{(j+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})\left(\sum_{t=2}^{T_i}[q=q_{t-1}][r=q_t]\right)}{\displaystyle\sum_{r'\in Q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})\left(\sum_{t=2}^{T_i}[q=q_{t-1}][r'=q_t]\right)}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})C(q,r;q_1\cdots q_{T_i})}{\displaystyle\sum_{r'\in Q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})C(q,r';q_1\cdots q_{T_i})}$$

$$= \frac{\text{状態}q\text{から状態}r\text{へ遷移する回数の期待値}}{\text{状態}q\text{から遷移する回数の期待値}}$$

$C(q,r;q_1\cdots q_T)$　$q_1\cdots q_T$の中でqからrに遷移する回数

HMMのEMアルゴリズム

[Mステップ] $\mathbf{b}^{(j+1)}$を求める

$$b_{q,o}^{(j+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})\left(\sum_{t=1}^{T_i}[q=q_t][o=o_t]\right)}{\sum_{o'\in\Sigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})\left(\sum_{t=1}^{T_i}[q=q_t][o'=o_t]\right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})C(q,o;q_1\cdots q_{T_i},o_1\cdots o_{T_i})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{T_i}\in Q} p(q_1\cdots q_{T_i}\mid o_1\cdots o_{T_i};\theta^{(j)})C(q;q_1\cdots q_{T_i})}$$

$$= \frac{\text{状態}q\text{に滞在し記号}o\text{を出力する回数の期待値}}{\text{状態}q\text{に滞在する回数の期待値}}$$

$C(q;q_1\cdots q_T)$　$q_1\cdots q_T$の中でqが出現した回数

$C(q,o;q_1\cdots q_T,o_1\cdots o_T)$　$q_1\cdots q_T o_1\cdots o_T$の中で$q$から$o$を出力する回数

状態遷移回数の期待値の例

- q, rの2つの状態があるとする (例えば、名詞、動詞)
- $o_1o_2o_3o_4$に対する状態列を列挙

状態列 $q_1q_2q_3q_4$	確率 $p(q_1o_1q_2o_2q_3o_3q_4o_4)$
qqqq	0.03
qqqr	0.02
qqrq	0.008
qqrr	0.02
qrqq	0.001
qrqr	0.03
qrrq	0.02
qrrr	0.08
rqqq	0.082
rqqr	0.085
rqrq	0.024
rqrr	0.011
rrqq	0.009
rrqr	0.098
rrrq	0.053
rrrr	0.055

状態qから状態rへ遷移する回数の期待値

$$= \sum_{q_1 \in Q, \cdots, q_T \in Q} p(q_1 \cdots q_T \mid o_1 \cdots o_T) \times (q_1 q_2 \cdots q_T \text{における} q \text{から} r \text{への遷移回数})$$

qからrに遷移する回数の期待値:
(0.02+0.008+0.02+0.001+0.03*2+0.02+0.08+
0.085+0.024+0.011+0.098)/0.626
=0.476/0.626=0.7603

HMMのためのEMアルゴリズムの問題点

- 期待値を計算するために全ての可能な隠れ状態を列挙すると文長に対し、指数爆発的計算量が必要

解決策：前向き後向きアルゴリズム。隠れ状態を列挙することなく、この期待値を計算する動的計画法。

まとめ

- EMアルゴリズム
  - 別の導出法と理解
  - 混合モデルのEMアルゴリズム
  - HMMのEMアルゴリズム
- 資料
  - http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ai2/