人工知能特論II　第12回

二宮　崇

今日の講義の予定

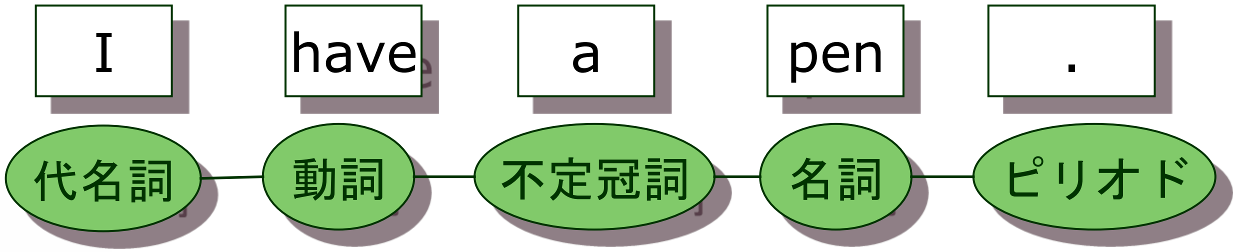
- 系列ラベリングのための確率的識別モデル(Linear-chain CRF)
  - 解析 (ビタビアルゴリズム)
  - 学習 (前向き後ろ向きアルゴリズム)
- 教科書
  - 高村 大也 (著), 奥村 学 (監修) 言語処理のための機械学習入門 (自然言語処理シリーズ), コロナ社, 2010
  - Yusuke Miyao (2006) From Linguistic Theory to Syntactic Analysis: Corpus-Oriented Grammar Development and Feature Forest Model, Ph.D Thesis, University of Tokyo
  - Jun'ichi Kazama (2004) Improving Maximum Entropy Natural Language Processing by Uncertainty-aware Extensions and Unsupervised Learning, Ph.D. Thesis, University of Tokyo
  - Cristopher M. Bishop "PATTERN RECOGNITION AND MACHINE LEARNING" Springer, 2006

系列ラベリングのための確率的識別モデル

LINEAR-CHAIN CRF

系列ラベリングのための確率的識別モデル Linear-chain CRF

- CRF (Conditional Random Fields, 条件付確率場)
  - 最大エントロピーモデルの一種
  - 出力yは入力xに対する条件付確率
  - 出力yが無向グラフ(yをノードに分解できる)
  - 素性を各ノードの近傍で定義
- Linear-chain CRF
  - ノードが線形につながったCRF (系列ラベリングのためのCRF)
  - 例えば、品詞解析の場合、入力xが文で、出力yが単語-品詞列となる。単語と品詞のペアがノードになる。素性を各ノードの近傍で定義する。



x =“I have a pen.”
y=“I-代名詞 have-動詞 a-不定冠詞 pen-名詞 .-ピリオド”

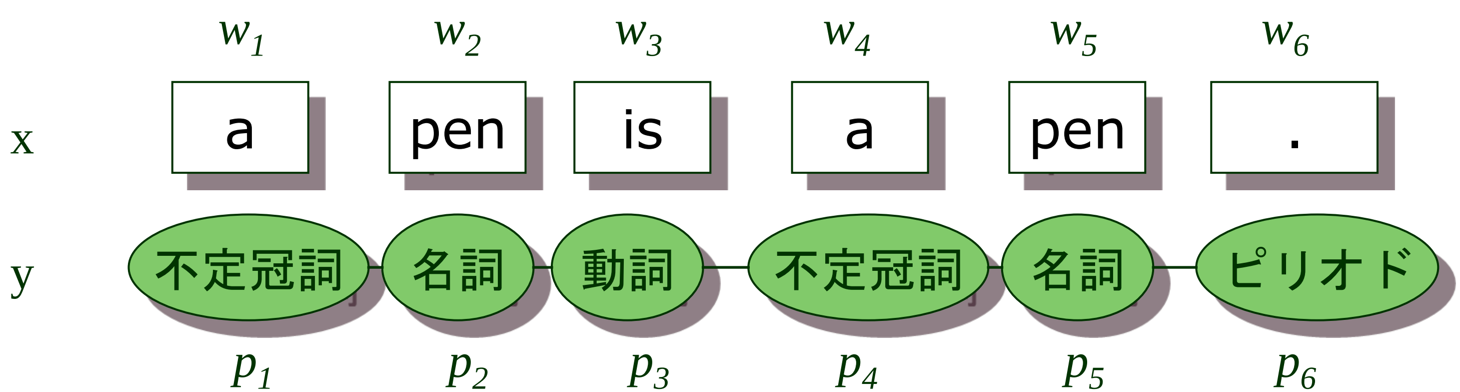
に対しp(y|x)を求める

Linear-chain CRF: 素性テンプレート

- 素性テンプレート
  - どのような素性を採用するか表記したもの
  - 訓練データに対し素性テンプレートを適用し、実際に出現した値だけを素性として採用
- 素性テンプレートの例
  - i番目のノードをc_iとする
  - i番目の品詞をp_iとする
  - i番目の単語をw_iとする
  - HMMと同様の素性の場合
    - 各ノードc_iに対し、$p_{i-1}p_i$ [最大で品詞数×品詞数の次元ができうる]
    - 各ノードc_iに対し、$w_i p_i$ [最大で単語数×品詞数の次元ができうる]
  - 他にもいろんな組合せの素性を追加できる
    - 各ノードc_iに対し、$w_{i-1} w_i p_i$
    - 各ノードc_iに対し、$p_{i-2} p_{i-1} p_i$

Linear-chain CRF: 素性テンプレートと素性

- 素性テンプレートの例
  - HMMと同様の素性の場合
    - 各ノードc_iに対し、$p_{i\text{-}1}p_i$
    - 各ノードc_iに対し、w_ip_i

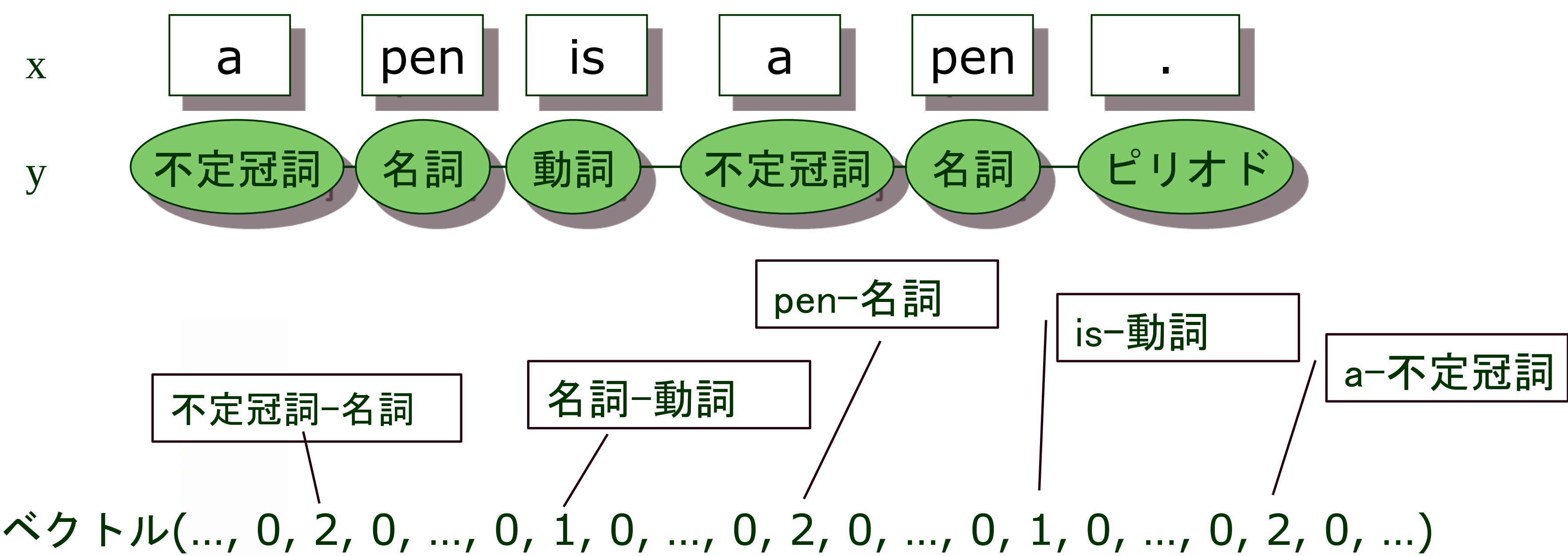


$p_{i\text{-}1}p_i$から生成される素性	w_ip_iから生成される素性
不定冠詞-名詞	a-不定冠詞
名詞-動詞	pen-名詞
動詞-不定冠詞	is-動詞
名詞-ピリオド	.-ピリオド

Linear-chain CRF: 全体の素性ベクトルと局所的素性ベクトルの関係

- 各素性関数の値は1文中に各素性が発火(出現)した回数

$$f_j(x, y) = \sum_c f_j(c)$$



Linear-chain CRF: 全体のスコアと局所的なスコアの関係

- 全体のスコア=各ノードcに対するスコアの積

$$p(y\mid x;\lambda)=\frac{1}{Z}\exp\left(\sum_j \lambda_j f_j(x,y)\right)=\frac{1}{Z}\exp\left(\sum_j \lambda_j \sum_c f_j(c)\right)=\frac{1}{Z}\exp\left(\sum_c \sum_j \lambda_j f_j(c)\right)=\frac{1}{Z}\prod_c \exp\left(\sum_j \lambda_j f_j(c)\right)$$

文全体の素性ベクトル: (2,0,3,1,1) $\longleftrightarrow$ $e^{\lambda_1\cdot 2+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 3+\lambda_4\cdot 1+\lambda_5\cdot 1}$

掛算

$e^{\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1+\lambda_4\cdot 1+\lambda_5\cdot 0}$

$e^{\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1+\lambda_4\cdot 0+\lambda_5\cdot 0}$

$e^{\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1+\lambda_4\cdot 0+\lambda_5\cdot 1}$

(1,0,1,1,0) (0,0,1,0,0) (1,0,1,0,1)

w_1 w_2 w_3

p_1 p_2 p_3

Linear-chain CRF: スコアの分解とHMMとの対応

- 単語-品詞列の確率

$$p(y \mid x; \lambda) = \frac{1}{Z(x,\lambda)} \exp\left(\sum_j \lambda_j f_j(x,y) \right) = \frac{1}{Z(x,\lambda)} \prod_c \exp\left(\sum_j \lambda_j f_j(c) \right)$$

品詞列集合全体のスコアの和 (前向きアルゴリズムで計算)

HMMの遷移確率と出力確率に対応

- 解析: ビタビアルゴリズムの適用
  - 遷移確率と出力確率 ⇔ ノードのスコア $\exp \sum_j \lambda_j f_j(c)$
- 学習: 前向き後向きアルゴリズムの適用
  - 遷移回数と出力回数 ⇔ 素性値(素性の発火回数)

1次のLinear-chain CRF

- ラベル集合をQ、入力をx、出力を$q_1 q_2 \ldots q_T$とする。
- Linear-chain CRF

$$p(q_1 q_2 \cdots q_T \mid x) = \frac{1}{Z_x} \prod_{t=1}^{T} \exp\left\{ \sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1}, q_t, x, t) \right\}$$

$$Z_x = \sum_{q'_1 \in Q, \cdots, q'_T \in Q} \prod_{t=1}^{T} \exp\left\{ \sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1}, q'_t, x, t) \right\}$$

ただし、Z_x は分配関数、λ_j は f_j に対する重み、q_0 = DUMMY(ダミーのラベル)とし、素性関数 f の引数は次のように定義される。

f (時刻 $t-1$ のラベル, 時刻 t のラベル, 入力, 時刻)

- 入力(第三引数)と時刻(第四引数)を与えることによって、入力の情報を素性として用いることができる
  - 例えば、品詞解析の場合、ラベルが品詞であり、入力が単語列となり、時刻tやその前後における単語を素性として用いることができる。

LINEAR-CHAIN CRFの解析

Linear-chain CRFの解析

- 入力x
- ラベル集合Q
- Linear-chain CRFの解析

$$\hat{q}_1\hat{q}_2\cdots\hat{q}_T = \mathop{\arg\max}_{q_1q_2\cdots q_T} p(q_1q_2\cdots q_T \mid x) = \mathop{\arg\max}_{q_1q_2\cdots q_T} \prod_{t=1}^{T} \exp\left\{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1}, q_t, x, t)\right\}$$

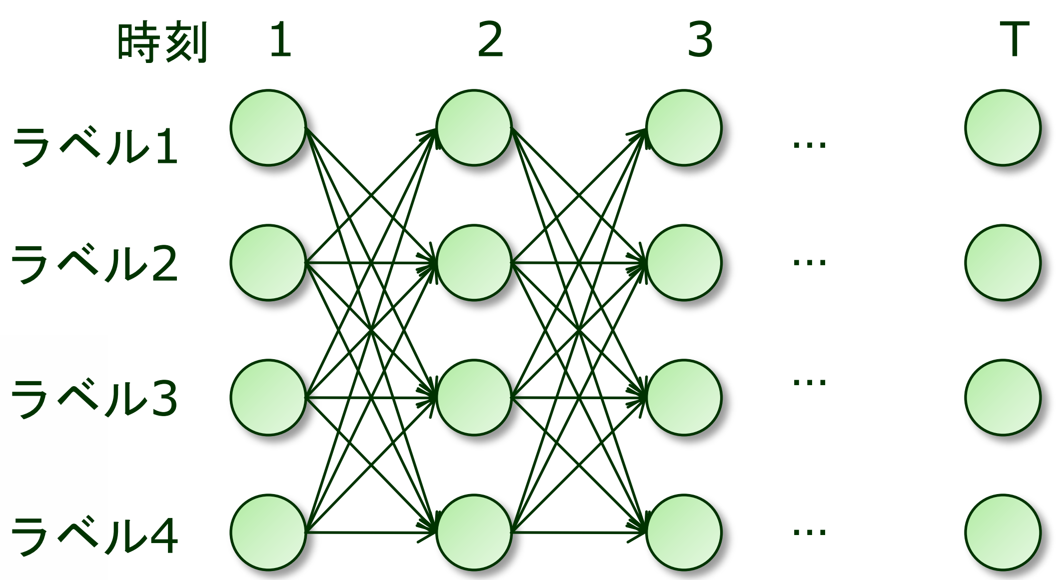
(Z_x は定数であるため、必要ない)

Linear-chain CRFの解析: ビタビアルゴリズム

- 動的計画法

$\delta(t, q)$: 時刻tにラベルqとなるラベル列の中で最大のスコア

$max_{q \in Q}\ \delta(T, q)$を求めれば良い

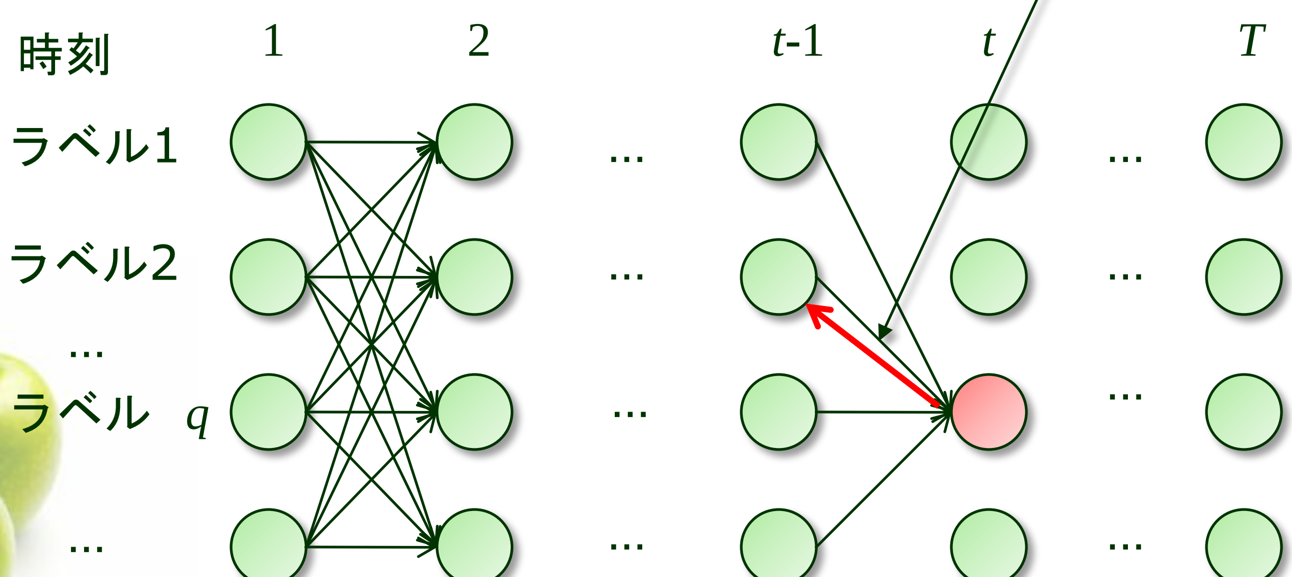


トレリス

Linear-chain CRFの解析: ビタビアルゴリズム

$$
\begin{aligned}
\delta(t,q) &= \max_{q_1\in Q,\cdots,q_{t-1}\in Q}\left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)}\right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)} \\
&= \max_{q_{t-1}\in Q}\ \max_{q_1\in Q,\cdots,q_{t-2}\in Q}\left(\prod_{u=1}^{t-2} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)}\right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-2},q_{t-1},x,t-1)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)} \\
&= \max_{q_{t-1}\in Q} \delta(t-1,q_{t-1}) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)}
\end{aligned}
$$

最大スコアで遷移したパスをバックポインタで保存



Linear-chain CRF:解析(ビタビアルゴリズム)

- 入力x
- Linear-chain CRFの解析

$$\max_{q_1 q_2 \cdots q_T} p(q_1 q_2 \cdots q_T \mid x) = \max_{q_1 q_2 \cdots q_T} \prod_{t=1}^{T} \exp\left\{ \sum_j \lambda_j f_j (q_{t-1}, q_t, x, t) \right\} = \max_q \delta(T, q)$$

- Linear-chain CRFのビタビアルゴリズム

HMMとの対応

for q∈Q

$\quad \delta[1, q] := \exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(\mathrm{DUMMY}, q, x, 1)\}$ ⟷ $\pi[q] b[q, o_1]$

for t =2 to T

$\quad$ for q∈Q

$\quad\quad \delta[t, q] := \max_{q' \in Q} \delta[t-1, q'] \exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(q', q, x, t)\}$

$\quad\quad bp[t, q] := \mathrm{argmax}_{q' \in Q} \delta[t-1, q'] \exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(q', q, x, t)\}$

$a[q', q]\, b[q, o_t]$

LINEAR-CHAIN CRFの学習

Linear-chain CRFの学習

- 学習 (パラメータ推定)
  - 訓練データの対数尤度(=目的関数)に対する勾配を0にする

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{N} f_j(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{y \in Y(x_i)} p(y \mid x_i; \lambda) f_j(x_i, y)$$

  - 目的関数とその勾配が計算できれば勾配法でパラメータが求まる。
- 問題点
  - 素性関数の期待値の計算: 「ある文xに対する全ての可能なラベル列集合Y(x)に対する確率」を計算しないといけない
  - 文長n、ラベル数lに対し、可能なラベル列はl^nある。全て展開するのはほぼ不可能
- 解決策
  - 前向き後ろ向きアルゴリズム
  - 畳み込まれたデータ構造を展開することなく素性関数の期待値を計算

Linear-chain CRFの学習: 目的関数

- 訓練データ $D=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$
- 各 y_i を $y_i=q_{i1}q_{i2}\ldots q_{iTi}$とする。
- 目的関数: 訓練データに対するLinear-chain CRFの対数尤度
- パラメータλに対する目的関数 $L(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \log\left(\prod_{i=1}^{N} p(y_i \mid x_i;\lambda)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\log\frac{1}{Z(x_i,\lambda)}\prod_{t=1}^{T_i}\exp\left(\sum_j \lambda_j f_j(q_{i(t-1)},q_{it},x_i,t)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\log Z(x_i,\lambda)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\sum_j \lambda_j f_j(q_{i(t-1)},q_{it},x_i,t)
\end{aligned}
$$

Linear-chain CRFの学習: 目的関数の勾配 (1/2)

- 目的関数 $L(\lambda)$ に対するパラメータ λ の勾配

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda_j} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} \frac{\partial Z(x_i,\lambda)}{\partial \lambda_j} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} \sum_{q'_1 \in Q, \cdots, q'_{T_i} \in Q} \sum_{t=1}^{T_i} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t) \exp\left\{ \sum_{u=1}^{T_i} \sum_{j} \lambda_j f_j(q'_{u-1}, q'_u, x_i, u) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{q'_1 \in Q, \cdots, q'_{T_i} \in Q} p(q'_1 \cdots q'_{T_i} \mid x_i) \sum_{t=1}^{T_i} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t)
\end{aligned}
$$

素性関数の合計の期待値となっている

Linear-chain CRFの学習: 目的関数の勾配 (2/2)

- 目的関数 $L(\lambda)$ に対するパラメータ λ の勾配

（前のスライドの続き）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda_j} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{q'_1 \in Q, \cdots, q'_{T_i} \in Q} p(q'_1 \cdots q'_{T_i} \mid x_i) \sum_{t=1}^{T_i} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} \sum_{q'_{t-1} \in Q, q'_t \in Q} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t) \sum_{q'_1 \in Q, \cdots, q'_{t-2} \in Q, q'_{t+1} \in Q, \cdots, q'_{T_i} \in Q} p(q'_1 \cdots q'_{T_i} \mid x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} \sum_{q'_{t-1} \in Q, q'_t \in Q} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t)\, p(q'_{t-1} q'_t \mid x_i)
\end{aligned}
$$

$q_{t\text{-}1}\, q_t$ の周辺確率を効率的に求められればよい

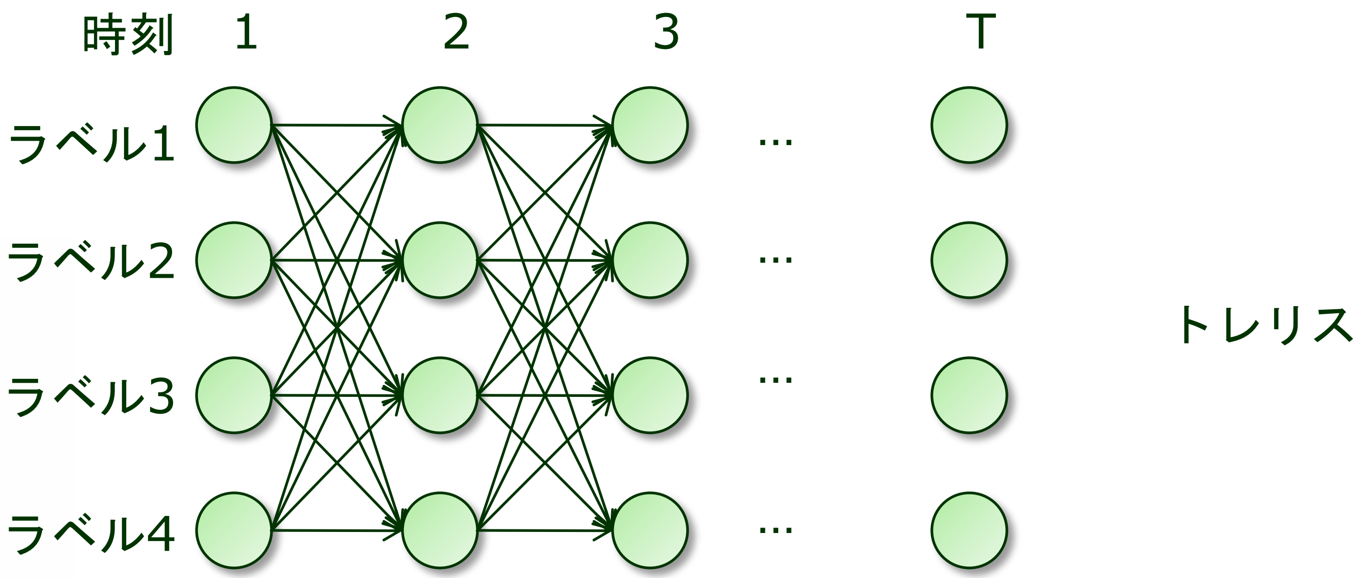
Linear-chain CRFの学習: 前向きアルゴリズム (1/3)

- 動的計画法

$\alpha(t, q)$: 時刻tにラベルqであるスコアの合計

$$\alpha(t,q) = \sum_{q_1\in Q,\cdots,q_{t-1}\in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)} \right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)}$$

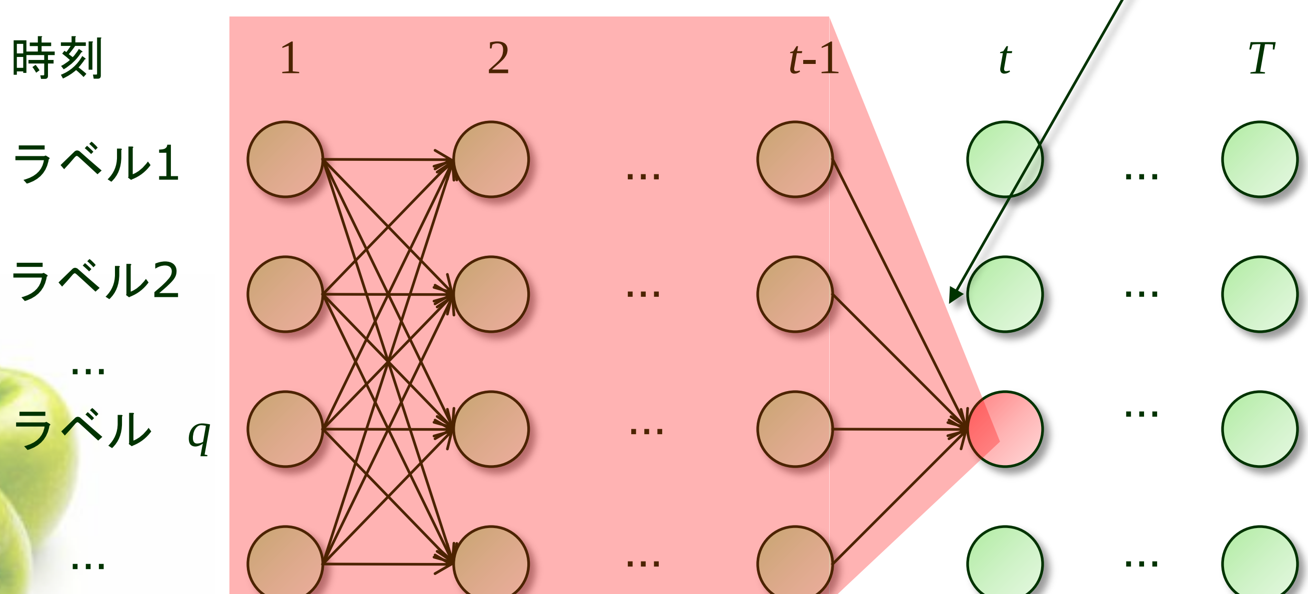
全てのt,qに対し、$\alpha(t, q)$を求めれば良い



Linear-chain CRFの学習: 前向きアルゴリズム (2/3)

$$
\begin{aligned}
\alpha(t,q) &= \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{t-1} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)} \right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)} \\
&= \sum_{q_{t-1} \in Q} \sum_{q_1 \in Q,\cdots,q_{t-2} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-2} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)} \right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-2},q_{t-1},x,t-1)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)} \\
&= \sum_{q_{t-1} \in Q} \alpha(t-1, q_{t-1}) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t-1},q,x,t)}
\end{aligned}
$$

全てのスコアの和



Linear-chain CRFの学習: 前向きアルゴリズム (3/3)

- Linear-chain CRFの前向きアルゴリズム

for $q \in Q$

  $\alpha[1, q] := \exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(\mathrm{DUMMY}, q, x, 1)\}$

for $t = 2$ to T

  for $q \in Q$

    $\alpha[t, q] := \Sigma_{q' \in Q}\, \alpha[t-1, q'] \exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(q', q, x, t)\}$

- 入力xとパラメータλが与えられているとする
- 分配関数 Z_x を効率的に求めることもできる
  ⇒ 目的関数を効率的に求めることができる！

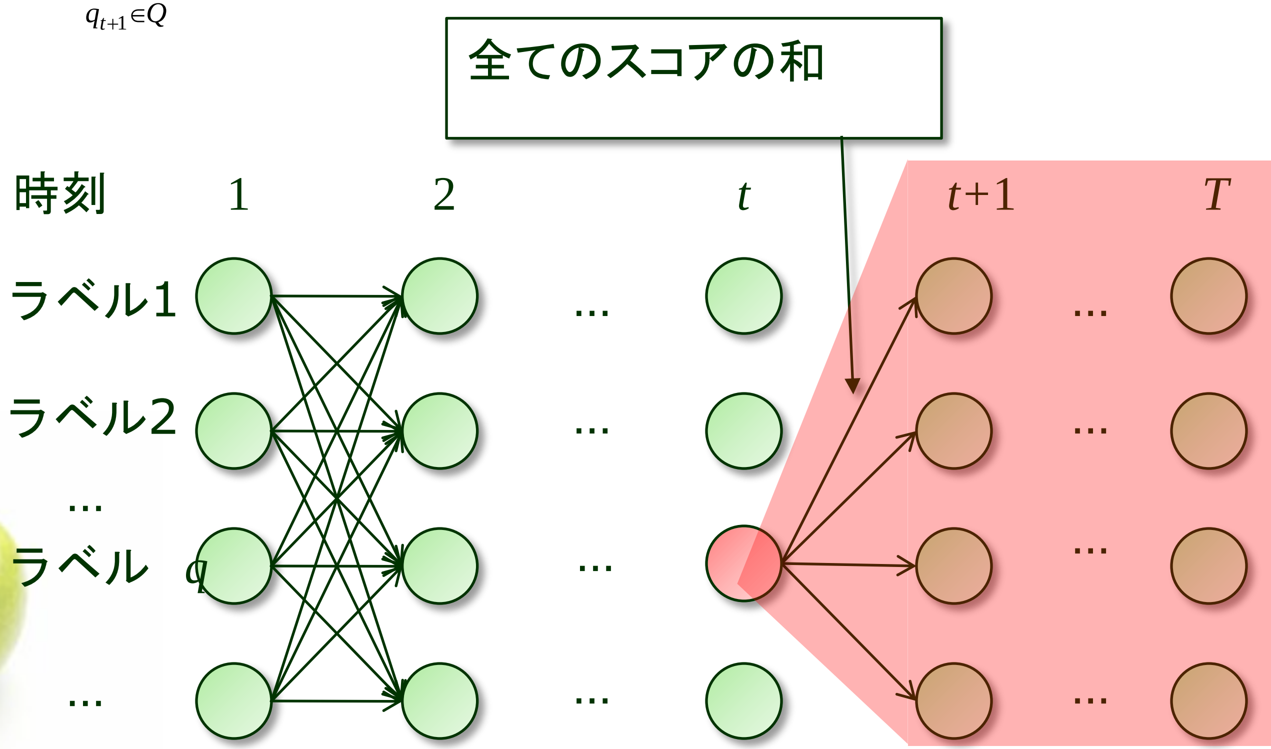
Linear-chain CRFの学習: 後ろ向きアルゴリズム (1/3)

- 前向きアルゴリズムを逆方向に適用
  - 文末から文頭に向かって実行
  - 向きが逆になることを除けば前向きアルゴリズムとまったく同じ
- $\beta(t, q)$:時刻tにラベルqとなっているとき、時刻$t+1$から文末までのスコアの合計

$$\beta(t,q) = \sum_{q_{t+1}\in Q,\cdots,q_T\in Q} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q,q_{t+1},x,t+1)} \prod_{u=t+2}^{T} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)}$$

Linear-chain CRFの学習: 後ろ向きアルゴリズム (2/3)

$$
\begin{aligned}
\beta(t,q) &= \sum_{q_{t+1}\in Q,\cdots,q_T\in Q} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q,q_{t+1},x,t+1)} \prod_{u=t+2}^{T} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)} \\
&= \sum_{q_{t+1}\in Q} \sum_{q_{t+2}\in Q,\cdots,q_T\in Q} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q,q_{t+1},x,t+1)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{t+1},q_{t+2},x,t+2)} \prod_{u=t+3}^{T} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q_{u-1},q_u,x,u)} \\
&= \sum_{q_{t+1}\in Q} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q,q_{t+1},x,t+1)} \beta(t+1,q_{t+1})
\end{aligned}
$$



Linear-chain CRFの学習: 後ろ向きアルゴリズム (3/3)

- 後ろ向きアルゴリズム

for $q \in Q$

　　$\beta[T, q] := 1$

for $t = T - 1$ to 1

　　for $q \in Q$

　　　$\beta[t, q] := \Sigma_{q' \in Q}\, \beta[t + 1, q']\exp\{\Sigma_j \lambda_j f_j(q, q', x, t + 1)\}$

Linear-chain CRF
学習(前向き後ろ向きアルゴリズム)

- $q_{t\text{-}1}\, q_t$ の周辺確率

$$
\begin{aligned}
p(q'_{t-1} q'_t \mid x_i) &= \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \sum_{q'_{t+1} \in Q,\cdots,q'_{T_i} \in Q} p(q'_1 \cdots q'_{T_i} \mid x_i) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \sum_{q'_{t+1} \in Q,\cdots,q'_{T_i} \in Q} \prod_{u=1}^{T_i} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \sum_{q'_{t+1} \in Q,\cdots,q'_{T_i} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \left(\prod_{u=t+1}^{T_i} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) \sum_{q'_{t+1} \in Q,\cdots,q'_{T_i} \in Q} \left(\prod_{u=t+1}^{T_i} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) \beta(t,q'_t) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \beta(t,q'_t) \sum_{q'_1 \in Q,\cdots,q'_{t-2} \in Q} \left(\prod_{u=1}^{t-1} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{u-1},q'_u,x_i,u)} \right) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \beta(t,q'_t) \alpha(t-1,q'_{t-1}) \\
&= \frac{1}{Z(x_i,\lambda)} \alpha(t-1,q'_{t-1}) e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1},q'_t,x_i,t)} \beta(t,q'_t)
\end{aligned}
$$

Linear-chain CRF
学習(前向き後ろ向きアルゴリズム)

- 前向き後ろ向きアルゴリズムによる目的関数$L(\lambda)$に対するパラメータλの勾配

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda_j} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\sum_{q'_{t-1}\in Q, q'_t \in Q} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t)\, p(q'_{t-1}q'_t \mid x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} f_j(q_{i(t-1)}, q_{it}, x_i, t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i}\sum_{q'_{t-1}\in Q}\sum_{q'_t\in Q} f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t)\frac{1}{Z(x_i,\lambda)}\alpha(t-1, q'_{t-1})e^{\sum_j \lambda_j f_j(q'_{t-1}, q'_t, x_i, t)}\beta(t, q'_t)
\end{aligned}
$$

まとめ

- 系列ラベリングのための確率的識別モデル
  - Linear-chain CRF
  - 解析 (ビタビアルゴリズム)
  - 学習 (前向き後ろ向きアルゴリズム)

今までの講義資料
http://aiweb.cs.ehime-u.ac.jp/~ninomiya/ai2/